



Nota estructurada con opciones americanas para estimar la probabilidad de incumplimiento

Structured note with American options to estimate the default probability

José Antonio Climent Hernández^{1*}, Domingo Rodríguez Benavides¹,
Roberto Yoan Castillo Dieguez²

¹Universidad Autónoma Metropolitana, México

²Universidad Autónoma de Querétaro, México

Recibido el 11 de septiembre de 2023; aceptado el 21 de junio de 2024

Disponible en Internet el: 1 de julio de 2025

Resumen

Los objetivos son: 1) estimar la probabilidad de incumplimiento de seis emisoras del IPC de la BMV y 2) la valuación de notas estructuradas con opciones americanas es aplicando la programación dinámica estocástica en tiempo discreto, los resultados son coherentes con el modelo de Merton (1974), pero las opciones americanas permiten el ejercicio anticipado. Los alcances son: 1) se presenta el modelo binomial recursivo y 2) las probabilidades de incumplimiento son estimadas por primera vez con este modelo y las limitaciones son: 1) no se tienen datos de la volatilidad implícita, pero es utilizada la volatilidad histórica y 2) no son estimadas: 1) la pérdida y la exposición por incumplimiento. Las conclusiones indican que el modelo propuesto permite el ejercicio anticipado para cumplir con los compromisos y las valuaciones de las opciones americanas y las estimaciones de las probabilidades de incumplimiento son coherentes con el modelo estructural de Merton.

Código JEL: G13, D81, G32, C61

Palabras clave: valuación de opciones; administración de riesgos; programación dinámica

* Autor para correspondencia

Correo electrónico: jach@azc.uam.mx (J. A. Climent Hernández).

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

<http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2025.5209>

0186- 1042/© 2019 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración. Este es un artículo Open Access bajo la licencia CC BY-NC-SA (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)

Abstract

The objectives are: 1) the estimation of the default probability of six IPC issuers of the BMV and 2) the valuation of structured notes with American options applying discrete time stochastic dynamic programming, the results obtained are consistent with the Merton (1974) model, but American options allow early exercise. The scopes are: 1) the recursive binomial model is analyzed and 2) the probabilities of default are estimated for the first time with this model and the limitations are: 1) there are no implied volatility data, but historical volatility is used and 2) the loss given default and exposure at default are not estimated. The conclusions indicate that the proposed model allows early exercise to comply with the commitments and the valuation of the American options and the estimation of the default probabilities are consistent with the Merton structural model.

JEL Code: G13, D81, G32, C61

Keywords: option's pricing; risk management; stochastic dynamic programming

Introducción

El riesgo crediticio existe desde que fue negociado un préstamo y actualmente está relacionado con la situación que enfrentan: 1) las instituciones financieras cuando otorgan un crédito y 2) los agentes económicos cuando toman decisiones para invertir en bonos, acciones, pagarés o venta de productos o servicios a crédito porque los acuerdos incluyen compromisos para pagar y existe la probabilidad de incumplimiento de la contraparte. La estimación del activo es con el precio de las acciones y la estimación de la probabilidad de incumplimiento con la valuación de una opción conociendo el pasivo. La hipótesis planteada es que si los factores exógenos (activo, pasivo, volatilidad, tasa de interés libre de riesgo) y endógenos (tiempo de vigencia y precio de liquidación) son conocidos, entonces es posible estimar la probabilidad de incumplimiento con una opción americana de venta.

La tasa de interés libre de riesgo es una tasa de interés teórica para una inversión libre de riesgo, es la tasa de interés utilizada para descontar los flujos de efectivo esperados y libres de riesgo hasta el presente. Los sustitutos de la tasa de interés libre de riesgo son: 1) la tasa del tesoro, 2) la tasa de interés de oferta interbancaria de Londres (LIBOR por el acrónimo de London Interbank Offered Rate) y 3) la tasa de interés de un swap indexado a un día (OIS por el acrónimo de Overnight Index Swap). Una OIS es obtenida con un swap de tasas de interés (IRS por el acrónimo de Interest Rate Swap), intercambiando la tasa de interés a un día por una tasa de interés fijo para un plazo determinado.

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea estableció el acuerdo en 1988 entre los bancos¹ del G-10 para aplicar estándares de capital mínimo para el riesgo de crédito, que está definido como el riesgo de que la contraparte incumpla las obligaciones.

¹ Alemania, Bélgica, Canadá, Estados Unidos, Francia, Holanda, Italia, Japón, Reino Unido y Suecia.

Los modelos para la estimación del riesgo de crédito están basados en variables económicas y financieras, utilizando factores ponderados para estimar la probabilidad de incumplimiento con fundamento en los trabajos de Altman (1968) y Altman et al. (1977).

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea presentó recomendaciones en 2004 que están basadas en: 1) el cálculo de los requisitos de capital mínimo, la calidad crediticia de los prestatarios y los requisitos de capital por el riesgo operativo, 2) la supervisión de la administración de fondos propios y 3) la disciplina de mercado para las prácticas bancarias y la estandarización para la cobertura de los riesgos de mercado, crédito, operacional y legal. Además, fueron establecidas las normas de transparencia, la publicación de información acerca de la exposición a riesgos y fueron definidos los estadísticos y la estimación del riesgo de crédito con la probabilidad de incumplimiento, la pérdida y la exposición al incumplimiento.

La estimación del riesgo crediticio está basada en Teoría de Probabilidad, Estadística y Finanzas. La estimación del riesgo de incumplimiento considera cuatro etapas: la primera es un descenso en la calificación crediticia (downgrade), la segunda es el incumplimiento (default), la tercera es la exposición (exposure) y la cuarta es la tasa de recuperación (recovery rate), entonces la estimación del riesgo crediticio considera tres componentes: la probabilidad de incumplimiento (default probability), la pérdida por el incumplimiento (loss given default) y la exposición en el instante de incumplimiento (exposure at default), por lo tanto, la dificultad para modelar el riesgo crediticio surge porque el incumplimiento es un fenómeno no frecuente, es decir, ocurre eventualmente.

Los modelos estructurales de Merton (1974), Black y Cox (1976), Geske (1977), Gupton et al. (1997), Jones et al. (1984), Vasicek (1984), Hull y White (1995), Longstaffe y Schwartz (1995), Kealhofer (2003), Jarrow y Protter (2004) y Jorion (2007) para la estimación del riesgo crediticio consideran que el incumplimiento es una variable endógena que está influenciada por la estructura del capital y suponen que los inversionistas tienen: 1) la información completa del mercado, 2) el conocimiento del valor del activo y del pasivo, 3) el incumplimiento está determinado por el cambio en el activo y 4) el incumplimiento ocurre si el activo es menor que el pasivo, es decir, si la empresa no tiene el activo suficiente para cubrir el pasivo, por lo tanto, los modelos estructurales están centrados en modelar el activo.

Los modelos de forma reducida de Litterman e Iben (1991), Jarrow y Turnbull (1995), Jarrow et al. (1997), Lando (1998), Madan y Unal (2000), Duffie (1998), Duffie y Singleton (1999), Hull y White (2001) y Jarrow y Protter (2004) para la estimación del riesgo de crédito consideran que el incumplimiento es una variable exógena y utilizan el diferencial de crédito para estimar la probabilidad de incumplimiento con dos tipos de modelos: 1) intensidad y 2) migración crediticia, es decir, no requieren

información de la estructura del capital y suponen que los inversionistas no tienen: 1) la información completa de la empresa y 2) el conocimiento del activo o del pasivo.

Los modelos de riesgo crediticio para estimar la pérdida esperada, en un periodo y dado un nivel de confianza, fueron motivados por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea en 2004 con los modelos CreditMetrics de Gupton et al. (1997) y CreditRisk+ de Credit Suisse First Boston (1997). Los modelos híbridos para estimar el riesgo crediticio están basados en los modelos estructurales y reducidos.

El objetivo es aplicar el modelo binomial recursivo de Climent Hernández (2014) para la valuación del riesgo crediticio, estimando la probabilidad de incumplimiento con la innovación de utilizar una opción americana de venta con una tasa de interés libre de riesgo nacional con colateral (TIE por el acrónimo de tasa de interés interbancaria de equilibrio) y la griega kappa.

El trabajo presenta la siguiente estructura: El marco teórico, la metodología, los resultados, la discusión, las conclusiones, las referencias y finalmente un anexo.

Marco teórico

El riesgo de crédito es la probabilidad de que el deudor incumpla con las obligaciones financieras, ocasionando pérdidas para el acreedor. La comprensión del riesgo de crédito es importante para la valuación de pasivos contingentes, el análisis de la solvencia, el diseño de productos financieros con menores niveles de riesgo, la estructuración de productos derivados, la evaluación de proyectos de inversión, el desarrollo de estrategias para la cobertura del riesgo, la evaluación del riesgo sistémico, el diseño de políticas públicas para mitigar el riesgo de crédito e identificar, medir, monitorear y controlar el riesgo de crédito.

El Comité de Supervisión Bancaria de Basilea presentó en 2010 las regulaciones motivadas por la crisis financiera de 2008, acerca de la adecuación del capital bancario y la liquidez que fueron acordados por los bancos² el G-20.

Hunzinger y Labuschagne (2014) indican que el modelo binomial es utilizado para la valuación de opciones y profesionistas y académicos están de acuerdo con el modelo utilizando el descuento de los flujos de efectivo esperados con una medida neutral al riesgo y con la tasa de interés libre de riesgo.

Klieštika y Cúgb (2015) indican que las instituciones financieras están expuestas al riesgo de crédito, por lo tanto, es necesario mejorar los modelos para identificar, minimizar, estimar y cubrir el

² Alemania, Arabia Saudita, Argentina, Australia, Brasil, Canadá, China, Corea del Sur, España, Estados Unidos, Francia, India, Indonesia, Italia, Japón, México, Reino Unido, Rusia, Sudáfrica y Turquía.

riesgo de crédito y comparan la cuantificación del riesgo de crédito con los modelos CreditRisk+, CreditMetrics y Merton (1974).

Abid et al. (2020) exploran la relación entre la probabilidad de incumplimiento, los horizontes de inversión y las calificaciones para mejorar la toma de decisiones financieras con la probabilidad de incumplimiento implícita basada en los spreads de los credit default swaps (CDS), concluyendo que la metodología basada en CDS es efectiva para evaluar y predecir el riesgo de incumplimiento.

Campolieti et al. (2022) analizan un modelo estructural y un modelo híbrido, incluyendo la probabilidad de incumplimiento y el diferencial de swaps de incumplimiento crediticio con un modelo de expansión espectral, concluyendo que el estudio presenta innovaciones en los modelos de riesgo de crédito con aplicaciones prácticas.

Gubareva, M. (2021) proporciona un modelo con fundamento en la información de mercado para estimar la pérdida esperada por incumplimiento conforme a la norma internacional de información financiera aplicando modelos actuariales para estimar la probabilidad de incumplimiento, concluyendo que es posible estimar la pérdida esperada.

Gredil et al. (2022) analizan la capacidad de las calificaciones crediticias y las medidas de riesgo de incumplimiento con modelos estructurales y de forma reducida, concluyendo que las calificaciones complementan las medidas de riesgo, ofreciendo información incremental del riesgo de incumplimiento.

Hasnaoui y Hasnaoui (2022) evalúan el impacto de la eficiencia del capital humano en el riesgo de crédito de la banca comercial empleando la probabilidad de incumplimiento, la relación de préstamos no productivos sobre el total de préstamos y las calificaciones crediticias, concluyendo que la eficiencia del capital humano impacta significativa y negativamente en el riesgo de crédito de la banca comercial.

Kevkhisvili (2022) presenta un enfoque para detectar y cuantificar cambios en la calidad crediticia con un modelo basado en el deterioro de la calidad crediticia a largo plazo aplicando un proceso estocástico Uhlenbeck y Ornstein de reversión a la media para modelar el apalancamiento, demostrando que el modelo es eficaz para detectar y cuantificar cambios en la calidad crediticia y en la probabilidad de incumplimiento concluyendo que el modelo de cambio endógeno es robusto y eficiente.

Sha (2022) analiza cómo la manipulación de calificaciones crediticias afecta la percepción de préstamos, concluyendo que la manipulación de calificaciones es un problema significativo, lo que plantea desafíos para la evaluación precisa del riesgo de crédito.

Yamanaka y Kinoshita (2022) proponen un modelo de riesgo de crédito estructural con fundamento en la información de órdenes de compra para realizar un análisis empírico utilizando muestras reales, utilizando el volumen de las órdenes de compra para estimar el activo y la probabilidad de incumplimiento, concluyendo que el modelo estructural es una herramienta eficaz para el riesgo de crédito.

Benhamed y Gassouma (2023) evalúan la capacidad del requerimiento de capital regulatorio para cubrir la pérdida esperada por incumplimiento, estimando la probabilidad de incumplimiento y simulando la sensibilidad del riesgo sistemático con el método Monte Carlo y la distribución de pérdida, concluyendo que el capital regulatorio es derivado del capital económico, pero con mayor sensibilidad al riesgo sistemático que resulta en costos adicionales por destinar más capital del necesario.

Metodología

Los alcances del trabajo son: presentar un resultado para estimar la probabilidad de incumplimiento con el modelo binomial recursivo para la valuación de opciones americanas de venta con la griega kappa. La originalidad del trabajo es la estimación de la probabilidad de incumplimiento con una opción americana de venta.

El modelo propuesto en el presente trabajo es un modelo estructural que aplica la valuación de opciones americanas propuesta por Climent Hernández (2014) con las innovaciones correspondientes. El incumplimiento ocurre cuando el activo A_T es menor que el pasivo P_T , es decir, cuando $A_T < P_T$. Suponiendo que el pasivo P_T está representado por un bono cupón cero y libre de riesgo B_t , si en la fecha de vencimiento $A_T > B_T = P_T = S$, entonces el tenedor del producto estructurado Π_T tiene el siguiente portafolio $\Pi_T = S - \max(S - A_T, 0) = S$.

Si la empresa compra el pasivo $P_0 = B_0 = S \exp(-iT)$ y adquiere una opción de compra sobre el activo A_t con precio de liquidación S igual que el valor nominal del bono B_T , es decir, si en la fecha de vencimiento $A_T < B_T = P_T = S$, entonces $\Pi_T = S + \max(A_T - S, 0) = S$, es decir, la empresa tiene el pasivo para hacer frente a las obligaciones. Si $A_T > B_T = P_T = S$, entonces la empresa ejerce la opción de compra y recupera el activo, es decir, $\Pi_T = S + \max(A_T - S, 0) = A_T$.

El planteamiento equivalente es: si la empresa compra el pasivo $P_0 = B_0 = S \exp(-iT)$ y emite una opción de venta sobre el activo A_t con precio de liquidación S igual que el valor nominal del bono B_T , es decir, si $A_T > B_T = P_T = S$, entonces $\Pi_T = S - \max(S - A_T, 0) = S$, es decir, la empresa tiene para hacer frente a las obligaciones. Si $A_T < B_T = P_T = S$, entonces la empresa liquida la opción de venta con el valor nominal del bono $B_T = P_T = S$ y recupera el activo, es decir, $\Pi_T = S - \max(S - A_T, 0) = A_T$.

El producto estructurado Π_T es un portafolio que está compuesto por: 1) la posición larga de un bono libre de riesgo B_0 con valor nominal B_T , B_0 es igual que el pasivo P_0 invertido a la tasa de interés libre de riesgo i , es decir, $B_T = B_0 \exp(iT)$, donde el tiempo transcurrido es T y 2) la posición corta de una opción de venta sobre el activo A_t con precio de liquidación S igual que B_T , es decir, $B_T = P_T = S$. Por lo tanto, el valor del producto estructurado con opciones europeas de venta $p(t, A_t)$ en la fecha de negociación es $\Pi_0 = P_0 - p(t, A_t)$ y en la fecha de vencimiento es $\Pi_T = \min(A_T, S)$. El valor del producto estructurado

con opciones americanas en la fecha de negociación es $\Pi_0 = P_0 - P(t, A_t)$ y en la fecha de ejercicio o de liquidación es $\Pi_{t \leq T} = \min(A_{t \leq T}, S)$.

La ecuación que determina el valor de la opción (seguro financiero) es fundamental en los modelos estructurales. La deducción de la ecuación considera la siguiente suposición:

$$\Delta A_t = \mu_A A_t \Delta t + \sigma_A A_t \Delta W_{A_t} \quad (1)$$

donde ΔA_t es cambio en el activo, μ_A es la tasa de interés esperada, σ_A es la desviación estándar del activo y ΔW_{A_t} es el cambio en el proceso de Wiener.

El supuesto de que el cambio en el activo ΔA_t está descrito por la ecuación diferencial estocástica (EDE) representada por la ecuación (1), significa que el activo es una variable exógena en un mercado eficiente con las siguientes hipótesis: 1) los cambios sucesivos son estocásticamente independientes y 2) los cambios sucesivos están regidos por una distribución de probabilidad, por lo tanto, los cambios son discretos e independientes. El activo tiene dos componentes: 1) determinista y 2) estocástico. El componente determinista corresponde al modelo de cambio del activo y el componente estocástico está representado por el proceso de Wiener. Las variables μ_A , σ_A y A_t no son fáciles de observar porque los estados financieros son publicados mensual o trimestralmente.

Si el activo A_t es una variable difícil de observar, entonces suponiendo que existe un seguro financiero V_t , donde el valor teórico del seguro financiero es una función del tiempo y del activo, es decir, está representada por $V_t = f(t, A_t)$, por lo tanto, el cambio en la valuación del seguro financiero es modelado con la siguiente EDE:

$$\Delta V_t = \mu_V V_t \Delta t + \sigma_V V_t \Delta W_{V_t} \quad (2)$$

donde ΔV_t es cambio en la valuación del seguro financiero, μ_V es la tasa de interés esperada, σ_V es la desviación estándar del seguro financiero y ΔW_{V_t} es el cambio en el proceso de Wiener.

La analogía entre el cambio del activo ΔA_t y el cambio en la valuación del seguro financiero ΔV_t existe. Si ΔV_t está determinado simultáneamente por la ecuación (2) y la relación funcional $f(t, A_t)$, entonces:

$$\Delta V_t = \left(\frac{\Delta f(t, A_t)}{\Delta t} + \frac{\mu_A A_t \Delta f(t, A_t)}{\Delta A_t} + \frac{(\sigma_A A_t)^2 \Delta^2 f(t, A_t)}{2 \Delta A_t^2} \right) \Delta t + \frac{\sigma_A A_t \Delta f(t, A_t) \Delta W_{A_t}}{\Delta A_t} \quad (3)$$

Si $\Delta W_t = \Delta W_{V_t} = \Delta W_{A_t}$ y además existe una estructura de correlación positiva y fuerte entre las ecuaciones (1) y (2), es decir, si $\rho(V_t, A_t) \rightarrow 1$, entonces el cambio en el valor del portafolio es:

$$\Delta X_t = (\mu_A \omega_1 + \mu_V \omega_2) \Delta t + (\sigma_A \omega_1 + \sigma_V \omega_2) \Delta W_t \quad (4)$$

donde w_k es la cantidad invertida en los componentes del portafolio X_t . La valuación del seguro financiero V_t aplica la teoría de arbitraje con un portafolio que garantiza que el coeficiente del miembro estocástico sea cero, entonces el rendimiento del portafolio es determinista porque el impacto del proceso de Wiener es eliminado, el portafolio está libre de riesgo y para evitar el arbitraje, el ingreso esperado del portafolio es cero, por lo tanto, las condiciones son:

$$\begin{aligned} \sigma_A \omega_1 + \sigma_V \omega_2 &= 0 \\ \mu_A \omega_1 + \mu_V \omega_2 &= 0 \end{aligned} \quad (5)$$

donde la ecuación (5) es un portafolio libre de riesgo, un portafolio libre de arbitraje y es un sistema de dos ecuaciones con dos variables y si satisface la siguiente condición:

$$\frac{\mu_A}{\sigma_A} = \frac{\mu_V}{\sigma_V} \quad (6)$$

entonces:

$$if(t, A_t) = \frac{\Delta f(t, A_t)}{\Delta t} + \frac{\mu_A A_t \Delta f(t, A_t)}{\Delta A_t} + \frac{(\sigma_A A_t)^2 \Delta^2 f(t, A_t)}{2 \Delta A_t^2} \quad (7)$$

donde i es la tasa de interés libre de riesgo, t es el tiempo, $f(t, A_t)$ es el valor del seguro financiero emitido sobre el activo A_t , μ_A es la tasa de interés esperada y σ_A es la volatilidad del activo. La ecuación (7) es el valor del pago contingente V_t , entonces el pago contingente V_t no depende de μ_V . La distribución es considerada neutral al riesgo, igualmente para la valuación de V_t y para el valor de A_t . El procedimiento de valuación es una función del tiempo y del activo.

El supuesto es que el activo A_t está compuesto con los dos tipos de pasivo:

1. Pasivo P_t de la empresa expresado por un bono cupón cero B_t en el instante t .

2. Capital de la empresa C_t , expresado por el producto del precio de las acciones M_t y la cantidad N de acciones emitidas, es decir, $C_t = NM_t$. Por lo tanto, el balance general de la empresa está representado de la siguiente forma:

$$A_t = P_t + C_t \quad (8)$$

donde A_t es el activo, P_t es el pasivo y C_t es capital.

La emisión de un bono B_t es un compromiso adquirido por la empresa para pagar el valor nominal del bono B_T , al tenedor, en el instante T , entonces $B_T = S$, donde S es el precio de liquidación de la opción. Si la empresa no emite más bonos y si además la empresa no tiene para pagar a los acreedores en el instante T , entonces esto es equivalente a que el activo A_t sea menor que el valor nominal del bono $B_T = S$, es decir, el incumplimiento se presenta cuando $A_T < S$.

Si la empresa tiene recursos, entonces paga a los acreedores el valor nominal del bono cupón cero, es decir, B_T y si no tiene recursos, entonces incumple con las obligaciones para pagar el valor nominal del bono cupón cero, es decir, la empresa actúa en el interés de los accionistas, por lo tanto, la condición final es:

$$B_T = \min(A_T, S) \quad (9)$$

Las condiciones de las ecuaciones (8) y (9) significan que el capital C_t es una opción sobre el activo A_t con precio de liquidación S y satisface:

$$iC_t = \frac{\Delta C_t}{\Delta t} + \frac{\mu_A A_t \Delta C_t}{\Delta A_t} + \frac{(\sigma_A A_t)^2 \Delta^2 C_t}{2\Delta A_t^2} \quad (10)$$

donde i es la tasa de interés libre de riesgo, C_t es el capital, t es el tiempo, μ_A es la tasa de interés esperada y σ_A es la volatilidad del activo. La condición final es:

$$\begin{aligned} C_T &= \max(A_T - S, 0) \\ -C_T &= \max(S - A_T, 0) \end{aligned} \quad (11)$$

El planteamiento es similar para la valuación de una opción de compra o de venta sobre el activo A_t en tiempo discreto porque el camino aleatorio de un proceso binomial independiente converge al proceso de Wiener.

Capital como una opción americana de compra

Si $A_t = P_t + C_t$, entonces $C_t = A_t - P_t$, entonces el capital C_t es equivalente a una opción americana de compra $C(t, A_t)$, donde el precio de las opciones europeas de compra $c(t, A_t)$ y el precio de las americanas de compra $C(t, A_t)$ son teóricamente iguales, es decir, $c(t, A_t) = C(t, A_t)$.

Pasivo como una opción europea de venta

Si $P_t = A_t - C_t$, entonces la nota estructurada con opciones americanas es $\Pi_t = A_t - C(t, A_t)$, donde la nota estructurada con opciones europeas es $\Pi_t = A_t - c(t, A_t)$:

$$\Pi_t = A_t \tilde{B}(n - w, \tilde{\theta}) + P_t B(n - w, \theta) \rightarrow A_t \Phi(-d_1) + P_t \Phi(d_2) \quad (12)$$

donde el modelo binomial complementario converge al modelo de Merton (1974).

Análogamente la nota estructurada con opciones americanas es $\Pi_t = P_t - P(t, A_t)$, donde el precio teórico de las opciones europeas de venta $p(t, A_t)$ es estrictamente menor que el precio teórico de las opciones americanas de venta $P(t, A_t)$, es decir, $p(t, A_t) < P(t, A_t)$, entonces la nota estructurada está determinada por $P_t - P(t, A_t) < P_t - p(t, A_t)$ y además por la paridad de compra y venta se satisface la siguiente condición $A_t - c(t, A_t) = P_t - p(t, A_t)$, por lo tanto, es necesario aplicar el modelo recursivo para la valuación de las opciones americanas de venta.

Modelo binomial recursivo para la valuación de opciones americanas

El modelo binomial recursivo permite la valuación de las opciones americanas de venta para un producto estructurado con opciones americanas que otorga la posibilidad de ejercer anticipadamente la opción americana para hacer frente a las obligaciones. El modelo recursivo para la valuación de opciones americanas de venta está basado en el modelo de Climent Hernández (2014):

$$V_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}} = \begin{cases} \max\left(\left(V_{\eta}^{a^{k+1} d^{\eta-k}} \pi + V_{\eta}^{a^k d^{\eta-k+1}} \theta\right) \exp(-i\delta T), V_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}}\right) & \text{si } 0 \leq k \leq \eta < n \\ V_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}} = \max\left(S - M_0 a^k d^{\eta-k}, 0\right) & \text{si } 0 \leq k \leq \eta = n \end{cases} \quad (13)$$

donde $\delta = n^{-1}$, $u = \exp(idT)$, $0 < d = a^{-1} < 1 < a = -2^{-1}B + 2^{-1}(B^2 - 4)^{0.5}$, para el valor del coeficiente $B = -(\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)u^{-1}$, $\pi = (u - d)(a - d)^{-1}$ y $\theta = 1 - \pi$. La estimación de los parámetros u , a , d , π y θ es presentada en el Anexo: ecuaciones (26), (30) y (27), respectivamente.

Por lo tanto, la valuación de la nota estructurada con opciones americanas es:

$$\Pi_t = P_t - V_{\eta}^{a^k d^{\eta-k}} = P_t - P(t, A_t) \quad (14)$$

donde Π_t es la nota estructurada con opciones americanas, P_t es el pasivo y $P(t, A_t)$ es la opción americana de venta emitida sobre el activo A_t y con precio de liquidación S .

Concepto de griegas para el modelo binomial recursivo

La delta es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del precio subyacente y representa la cobertura a corto plazo:

$$\Delta = \frac{\Delta V(t, A_t)}{\Delta A_t} = \frac{V(t, A_t^a) - V(t, A_t^d)}{A_t^a - A_t^d} \quad (15)$$

La gama es el cambio proporcional de la delta con respecto al cambio proporcional del precio subyacente y representa la cobertura a largo plazo:

$$\Gamma = \frac{\Delta^2 V(t, A_t)}{\Delta A_t^2} = \frac{2\left(V(t, A_t^{a^2}) - V(t, A_t^{d^2})\right)}{A_t^{a^2} - A_t^{d^2}} \quad (16)$$

La nu es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional de la volatilidad subyacente:

$$\nu = \frac{\Delta V(t, A_t)}{\Delta \sigma} = \frac{V(t, \sigma_2) - V(t, \sigma_1)}{\sigma_2 - \sigma_1} \quad (17)$$

La rho es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional de la tasa de interés libre de riesgo:

$$\rho = \frac{\Delta V(t, A_t)}{\Delta i} = \frac{V(t, i_2) - V(t, i_1)}{i_2 - i_1} \quad (18)$$

La theta es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del tiempo transcurrido:

$$\Theta = \frac{\Delta V(t, A_t)}{\Delta t} = \frac{V(t, A_t^{ad}) - V(t, A_t)}{2\delta T} \quad (19)$$

La kappa es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del precio de liquidación:

$$\kappa = \frac{\Delta V(t, A_t)}{\Delta S} = \frac{V(t, S_2) - V(t, S_1)}{S_2 - S_1} \quad (20)$$

Probabilidad de incumplimiento

La probabilidad de incumplimiento es equivalente a que la opción europea de compra esté fuera de dinero o a que la opción europea de venta esté dentro de dinero:

$$P(A_T < S) = \kappa \exp(iT) \quad (21)$$

Resultados

El IPC fue lanzado el 30 de octubre de 1978 y mide el desempeño de las acciones de mayor liquidez listadas en la BMV para proporcionar un índice representativo y replicable del mercado bursátil mexicano. Las frecuencias relativas fr y las frecuencias relativas acumuladas Fr de seis emisoras con las mayores ponderaciones al 28 de junio de 2023 son presentadas en la Tabla 1.

Tabla 1
 Frecuencias de las ponderaciones de IPC

Emisora	Nombre	fr	Fr
WALMEX	Wal Mart de México SAB de CV	0.1974	0.1974
AMXB	América Móvil SAB de CV	0.1267	0.3241
GMEXICOB	Grupo México SAB de CV	0.1004	0.4245
GFNORTEO	Grupo Financiero Banorte SAB de CV	0.0637	0.4882
BIMBOA	Grupo Bimbo SAB de CV	0.0602	0.5484
FEMSAUBD	Fomento Económico Mexicano SAB de CV	0.0560	0.6044

Fuente: Elaboración propia con información de Refinitiv, 2023.

La Tabla 1 presenta las frecuencias relativas (ponderación con respecto al total) del IPC ordenadas descendientemente hasta acumular más de 60 %: WALMEX 19.74 %, AMXB 12.67 %, GMEXICOB 10.04 %, GFNORTEO 6.37 %, BIMBOA 6.02 % y FEMSAUBD 5.60 %, es decir, son las seis emisoras más líquidas de las 35 que componen al IPC, donde las ponderaciones son una función del valor de capitalización de mercado y representan más del 5 %. El diagrama de Pareto de las ponderaciones es presentado en la Figura 1.

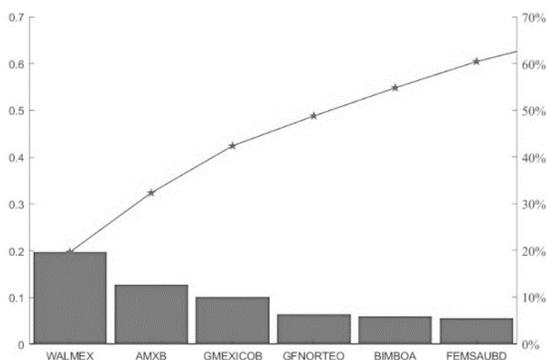


Figura 1. Diagrama de Pareto de las ponderaciones de IPC.
 Fuente: Elaboración propia con información de Refinitiv, 2023.

La Figura 1 muestra el diagrama de Pareto para justificar que WALMEX, AMXB, GMEXICOB, GFNORTEO, BIMBOA y FEMSAUBD son las seis emisoras que tienen una ponderación significativa (mayor que 5 %) y representan más de 60 % del IPC, es decir, son las seis emisoras con las mayores ponderaciones con respecto al total del IPC.

Por lo tanto, la selección de las seis emisoras del IPC de la BMV está basada en los criterios de relevancia y representatividad porque fueron elegidas las seis emisoras que tienen una ponderación significativa (mayor que 5 %) en el IPC. Los 4 136 precios de las seis emisoras del 02/01/2007 al 28/06/2023 son presentados en la Figura 2.



Figura 2. Precios diarios.

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Figura 2 muestra los precios de las emisoras en el periodo de estudio y los rendimientos son positivos, es decir, los precios del 02/01/2007 son menores que los precios del 28/06/2023. Los 4 135 rendimientos del 02/01/2007 al 28/06/2023 son presentados en la Figura 3.

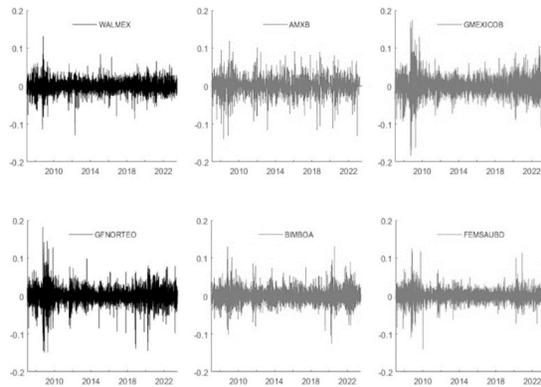


Figura 3. Rendimientos logarítmicos diarios.

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Figura 3 presenta los 4 135 rendimientos logarítmicos diarios de las seis emisoras en el periodo de 03/01/2007 al 28/06/2023. Las 4 134 volatilidades históricas de 04/01/2007 al 28/06/2023 son presentadas en la Figura 4.

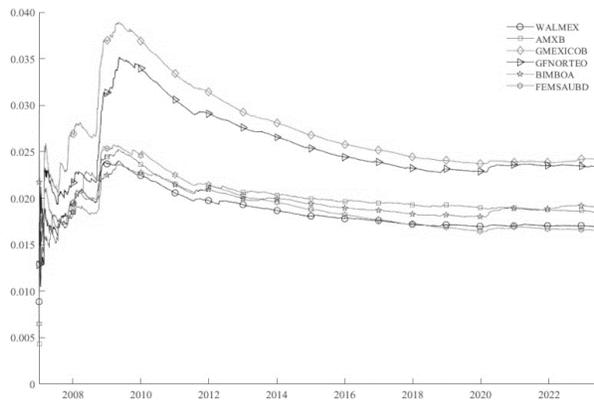


Figura 4. Volatilidades históricas diarias.

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Figura 4 indica que las volatilidades históricas son crecientes durante 2008 y 2009, después son decrecientes hasta 2011, en donde es apreciado un incremento, pero continúan descendiendo hasta 2020, en donde es apreciado un incremento. La emisora con mayor volatilidad después de 2022 es

GMEXICOB, seguida por GFNORTEO, BIMBOA, AMXB, WALMEX y FEMSAUBD. Las estadísticas descriptivas de los 4 135 rendimientos son presentadas en la Tabla 2.

Tabla 2
 Estadísticas descriptivas

Emisora	Media	Mediana	min	max	S _x	g ₁	g ₂
WALMEX	0.000256	0.000279	-0.1298	0.1319	0.0169	-0.19	4.13
AMXB	0.000113	0.000000	-0.1403	0.1186	0.0184	-0.44	7.82
GMEXICOB	0.000461	0.000455	-0.1841	0.1742	0.0242	-0.10	5.59
GFNORTEO	0.000287	0.000530	-0.1496	0.1823	0.0234	-0.26	5.96
BIMBOA	0.000464	0.000000	-0.1255	0.1317	0.0190	0.25	3.75
FEMSAUBD	0.000361	0.000000	-0.1403	0.1258	0.0165	0.01	7.35

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Tabla 2 presenta las estimaciones puntuales de las estadísticas descriptivas (media, mediana, mínimo, máximo, desviación estándar, coeficiente de asimetría y curtosis) de los rendimientos. Los promedios aritméticos, los coeficientes de asimetría y de curtosis confirman tendencia positiva, asimetría negativa para WALMEX, AMXB, GMEXICOB, GFNORTEO, asimetría positiva para BIMBOA y FEMSAUBD y leptocurtosis en las distribuciones de los rendimientos. Los diagramas de caja de los rendimientos son presentados en la Figura 5.

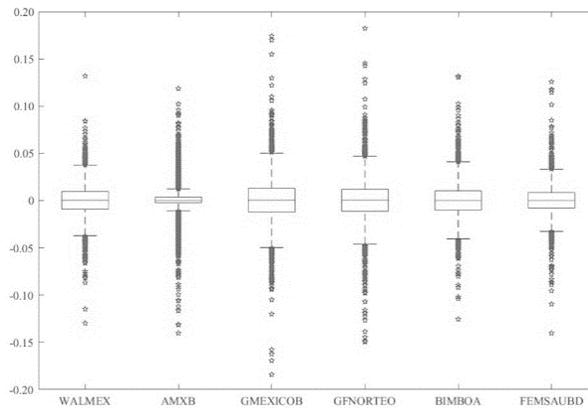


Figura 5. Diagramas de cajas y bigotes.

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Figura 5 presenta los diagramas de cajas de los rendimientos, confirmando que las medianas son positivas, las asimetrías negativas para WALMEX, AMXB, GMEXICOB y GFNORTEO, las asimetrías positivas para BIMBOA y FEMSAUBD y la leptocurtosis de las distribuciones de los rendimientos.

Si la TIE de fondeo el 31/03/2023 para 90 días es $i^{(4)} = 0.115221$ con base 360 días, entonces la tasa de interés libre de riesgo instantánea anual con base 365 días es:

$$i_{\infty} = \ln \left(1 + \frac{365i^{(m)}}{90m} \right) = \ln \left(1 + \frac{365i_m}{90} \right) \quad (22)$$

Por lo tanto, la tasa de interés libre de riesgo instantánea anual es $i = 0.110486517732013$. Si la fecha de vencimiento de la opción es el 29/06/2023, entonces el tiempo de vigencia es 90 días, es decir, $T = 0.246575$. El activo el pasivo³ y el precio de liquidación de las seis emisoras del 31/03/2023 son presentados en la Tabla 3.

Tabla 3
 Activo, pasivo y precio de liquidación

Emisora	A _t	P _t	S
WALMEX	413 519 190.00	249 047 541.00	255 925 671.57
AMXB	1 593 341.00	1 184 070.00	1 216 771.34
GMEXICOB	20 174 276.00	9 545 370.00	9 808 991.56
GFNORTEO	2 130 031.00	1 877 460.00	1 929 311.20
BIMBOA	338 205.00	224 946.00	231 158.50
FEMSAUBD	810 692.00	449 552.00	461 967.61

Fuente: Elaboración propia, 2023.

La Tabla 3 presenta el activo, el pasivo y el precio de liquidación que es calculado con el pasivo, la tasa de interés libre de riesgo y el tiempo de vigencia, es decir, $S = P \exp(iT)$. Las volatilidades históricas anuales del 31/03/2023 son presentadas en la Tabla 4.

Tabla 4
 Volatilidades históricas anuales

Factor	WALMEX	AMXB	GMEXICOB	GFNORTEO	BIMBOA	FEMSAUBD
s ₁	0.269653	0.294685	0.384389	0.372283	0.303251	0.263513

Fuente: Elaboración propia con información de Yahoo Finance, 2023.

La Tabla 4 presenta las volatilidades históricas anuales del 31/03/2023 que son estimadas a partir de la desviación estándar s_x de los rendimientos, es decir, $s_1 = s_x 252^{0.5}$. La valuación de las opciones

³ Los activos y los pasivos fueron obtenidos, respectivamente, para el primer trimestre de 2023 de las siguientes páginas: <https://www.walmex.mx>, <https://www.americamovil.com>, <https://www.gmexico.com>, <https://www.grupobimbo.com>, <https://www.banorte.com> y <https://www.femsa.com>.

americanas de venta con el modelo propuesto ($n = 5\ 000$) y la valuación de las europeas de venta son presentadas en la Tabla 5.

Tabla 5
 Valuación de opciones

Opción	WALMEX	AMXB	GMEXICOB	GFNORTEO	BIMBOA	FEMSAUBD
$P(t, A_t)$	782.31	1 615.20	26.89	56 021.05	43.57	0.05
$p(t, A_t)$	771.95	1 575.90	26.71	54 248.86	42.78	0.05

Fuente: Elaboración propia, 2023.

La Tabla 5 presenta la valuación de las opciones americanas de venta $P(t, A_t)$ con el modelo recursivo propuesto por Climent Hernández (2014) y la valuación teórica de las opciones europeas de venta $p(t, A_t)$ con el modelo de Merton (1974). Los precios teóricos de las opciones americanas son mayores (WALMEX 1.34 %, AMXB 2.49 %, GMEXICOB 0.66 %, GFNORTEO 3.27 %, BIMBOA 1.85 % y FEMSAUBD 0.66 %) que los precios teóricos de las opciones europeas.

El precio teórico de las opciones americanas es mayor que el precio teórico de las opciones europeas, pero las opciones americanas tienen la ventaja que permiten ejercer anticipadamente la nota estructurada, es decir, en caso de que la empresa no tenga la posibilidad de hacer frente a los compromisos, es decir, si $P_t > A_t$, entonces liquida anticipadamente el pasivo y la opción americana para hacer frente a los compromisos. Por lo tanto, el producto estructurado con opciones americanas es más económico que el producto estructurado europeo porque las opciones americanas tienen un mayor precio que las opciones europeas, ambas notas estructuradas, americanas y europeas, otorgan la cobertura para minimizar el incumplimiento, pero la nota estructurada con opciones americanas permite el ejercicio anticipado cuando el incumplimiento es detectado, sin la necesidad de esperar hasta la fecha de vencimiento como en el caso de la nota estructurada con opciones europeas. La probabilidad de incumplimiento del modelo propuesto y del modelo de Merton (1974) son presentadas en la Tabla 6.

Tabla 6
 Probabilidad de incumplimiento

Factor	WALMEX	AMXB	GMEXICOB	GFNORTEO	BIMBOA	FEMSAUBD
$\Pi (A_T < S)$	0.0001	0.0255	0.0001	0.2924	0.0043	0.0000
$\Phi (-d_2)$	0.0001	0.0253	0.0001	0.2775	0.0042	0.0000

Fuente: Elaboración propia, 2023.

La Tabla 6 presenta la probabilidad de incumplimiento $\Pi (A_T < S)$ del modelo propuesto y es similar a la probabilidad de incumplimiento $\Phi (-d_2)$ del modelo de Merton, entonces el modelo propuesto evalúa similarmente la probabilidad de incumplimiento de acuerdo con el modelo de Merton. El valor teórico de las notas estructuradas con opciones americanas y europeas es presentado en la Tabla 7.

Tabla 7
 Valor de las notas estructuradas

Nota	$\Pi_t = P_t - P(t, A_t)$	$\Pi_t = P_t - p(t, A_t)$
WALMEX	249 046 758.69	249 046 769.05
AMXB	1 182 454.80	1 182 494.10
GMEXICOB	9 545 343.11	9 545 343.29
GFNORTEO	1 821 438.95	1 823 211.14
BIMBOA	224 902.43	224 903.22
FEMSAUBD	449 551.95	449 551.95

Fuente: Elaboración propia.

La Tabla 7 indica que el valor teórico de las notas estructuradas con opciones americanas es menor que el valor de las notas estructuras europeas porque el precio teórico de las opciones americanas es mayor que el precio teórico de las opciones europeas.

Discusión

La valuación de productos derivados es significativa para la toma de decisiones informadas. Este análisis presenta la aplicación de un modelo novedoso para la valuación de notas estructuradas aplicando opciones americanas de venta, centrándose en la estimación de la probabilidad de incumplimiento de seis emisoras del IPC de la BMV. La aplicación de la programación dinámica estocástica en tiempo discreto y el modelo binomial recursivo representan una contribución significativa a la teoría y a la práctica de la gestión del riesgo de crédito.

Los resultados obtenidos de la aplicación del modelo binomial recursivo y la programación dinámica estocástica en tiempo discreto son consistentes con la teoría existentes sobre opciones americanas y el modelo estructural de Merton (1974) para riesgo de crédito. La ecuación analítica derivada proporciona una herramienta efectiva para el ejercicio anticipado de notas estructuradas. Por lo tanto, el modelo propuesto tiene una precisión significativa en la estimación de las probabilidades de incumplimiento, alineándose con las expectativas teóricas del modelo de Merton (1974), considerando los fundamentos económicos subyacentes y proporcionando una visión detallada del riesgo de crédito.

El estudio indica que aún con la falta de la volatilidad implícita, el modelo propuesto es robusto para la valuación anticipada de los compromisos financieros y además proporciona estimaciones fiables de la probabilidad de incumplimiento. El modelo supone una estructura de mercado y condiciones económicas constantes, lo que no refleja la realidad en entornos volátiles o inestables, pero el modelo binomial recursivo tiene la posibilidad de incluir tasas y volatilidades deterministas o estocásticas.

Las investigaciones futuras podrían explorar la integración de datos de volatilidad implícita (sonrisa de volatilidad), los impactos económicos en tiempo real para refinar aún más los modelos de riesgo crediticio o la aplicación de otras funciones de distribución.

Conclusiones

El trabajo presenta un modelo innovador para la valuación de notas estructuradas con opciones americanas y la aplicación de la programación dinámica estocástica en tiempo discreto que es una herramienta robusta para la valuación de opciones americanas de venta y que permite capturar la complejidad de estos productos financieros en escenarios donde es posible el ejercicio anticipado de las opciones americanas incluidas en el portafolio.

El análisis del modelo binomial recursivo indica que satisface las condiciones para: 1) la valuación de opciones americanas, 2) la estimación de las probabilidades de incumplimiento, entonces con una nota estructurada con opciones americanas es planteado un modelo estructural para el riesgo de crédito, por lo tanto, los objetivos son alcanzados. El modelo binomial recursivo está basado en un proceso de Wiener que satisface la ecuación diferencial parcial de Black y Scholes en tiempo discreto, adaptado para permitir el ejercicio anticipado de opciones americanas de venta. Este enfoque es particularmente relevante para la gestión del riesgo de crédito porque permite una estimación de la probabilidad de incumplimiento que proporciona información para la toma de decisiones sobre la asignación de capital y la implementación de estrategias de cobertura.

Si los factores exógenos y endógenos son conocidos, entonces es posible estimar la probabilidad de incumplimiento con una opción americana de venta y es posible utilizar las volatilidades implícitas o históricas en el modelo propuesto, por lo tanto, la hipótesis planteada es alcanzada con la metodología propuesta.

La originalidad del trabajo está en la estimación de la probabilidad de incumplimiento con la valuación de opciones americanas de venta aplicando el concepto de griegas (κ) que justifica la aplicación del modelo, la estimación de la probabilidad de incumplimiento con la ventaja de que la opción americana tiene la posibilidad de ejercicio anticipado, lo que otorga al modelo propuesto una cualidad adicional comparado con los modelos con opciones europeas.

La metodología propuesta está basada en supuestos simplificados y no capturan completamente la complejidad del riesgo de crédito, entonces es posible subestimar o sobreestimar la probabilidad de incumplimiento y tomar decisiones inadecuadas en la administración del riesgo porque el modelo propuesto está basado en la valuación de opciones con datos históricos sin abordar exhaustivamente

aspectos del riesgo de crédito, como la correlación entre rendimientos, la diversificación de portafolio e indicadores macroeconómicos para mejorar la precisión de las probabilidades de incumplimiento.

Referencias

- Abid, A., Abid, F. y Kaffel, B. (2020). CDS-based implied probability of default estimation. *The Journal of Risk Finance*, 21(4): 399-422. <https://doi.org/10.1108/JRF-05-2019-0079>.
- Altman, E. I. (1968). Financial Ratios, Discriminant analysis and the Prediction of Corporate Bankruptcy. *The Journal of Finance*, 23: 589-609. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1968.tb00843.x>.
- Altman, E. I. Haldeman, R. G. y Narayanan, P. (1977). ZETA™ analysis A new model to identify bankruptcy risk of corporations. *Journal of Banking & Finance*, 1(1): 29-54. [https://doi.org/10.1016/0378-4266\(77\)90017-6](https://doi.org/10.1016/0378-4266(77)90017-6).
- Basel Committee on Banking Supervision (1998). Basel I: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards. <https://www.bis.org/publ/bcbs04a.pdf>.
- Basel Committee on Banking Supervision (2004). Basel II: International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards: A Revised Framework. Disponible en: <https://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf>. Consultado: 28/06/2023.
- Basel Committee on Banking Supervision (2010). Basel III: A Global Regulatory Framework for more Resilient Banks and Banking Systems. Disponible en: https://www.bis.org/publ/bcbs189_dec2010.pdf. Consultado: 28/06/2023.
- Benhamed, A. y Gassouma, M. S. (2023). Investigation and Modelling of Economic Systematic Risk and Capital Requirement: A Monte Carlo Simulation. *Journal of Risk and Financial Management*, 16(241): 1-13. <https://doi.org/10.3390/jrfm16040241>.
- Black, F. y Cox, J. C. (1976). Valuing Corporate Securities: Some Effects of Bond Indenture Provisions. *Journal of Finance*, 31(2): 351-367. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1976.tb01891.x>.
- Campolieti, G., Kato, H. y Makarov, R. N. (2022). Spectral Expansions for Credit Risk Modelling with Occupation Times. *Risks* 10(12): 1-20. <https://doi.org/10.3390/risks10120228>.
- Climent Hernández, J. A. (2014). La ecuación de segundo grado en la estimación de parámetros de la martingala y la valuación de opciones americanas a través de la programación dinámica estocástica. *Estocástica: Finanzas y Riesgo*, 4(2): 155-190. Disponible en: <http://estocastica.azc.uam.mx/index.php/re/article/download/64/60>. Consultado: 28/06/2023.
- Credit Suisse First Boston (1997). CreditRisk+: A Credit Risk Management Framework. Credit Suisse Financial Products. Disponible en: <https://globalriskguard.com/resources/credit/creditrisk.pdf>. Consultado: 28/06/2023.

- Duffie, G. (1998). Defaultable term structure models with fractional recovery of par. Graduate School of Business, Stanford University. Disponible en: <http://web.stanford.edu/~duffie/par.pdf>. Consultado: 28/06/2023.
- Duffie, D. y Singleton, K. J. (1999). Modeling Term Structures of Defaultable Bonds. *Review of Financial Studies*, 12(4): 687-720. <https://doi.org/10.1093/rfs/12.4.687>.
- Erdős, P. y Rényi, A. (1960). On the evolution of random graphs. *Publications of the Mathematical Institute of Hungarian Academy of Sciences*, 5: 17-61. Disponible en: <https://snap.stanford.edu/class/cs224w-readings/erdos60random.pdf>. Consultado: 28/06/2023.
- Geske, R. (1977). The Valuation of Corporate Liabilities as Compound Options. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 12(2): 541-552. <https://doi.org/10.2307/2330330>.
- Gredil, O. R., Kapadia, N. y Lee, J. H. (2022). On the information content of credit ratings and market-based measures of default risk. *Journal of Financial Economics*, 146: 172-204. <https://doi.org/10.1016/j.jfineco.2022.07.005>.
- Gubareva, M. (2021). How to estimate expected credit losses – ECL – for provisioning under IFRS 9. *The Journal of Risk Finance*, 22(2): 169-190. <https://doi.org/10.1108/JRF-05-2020-0094>.
- Gupton, G. M., Finger, C. C. y Bhatia, M. (1997). CreditMetrics Technical Document. J. P. Morgan & Co. Incorporated, New York. Disponible en: <http://www.dofin.ase.ro/acodirlasu/lect/riskmgdofin/cmt2.pdf>. Consultado: 28/06/2023.
- Hasnaoui, J. A. y Hasnaoui, A. (2022). How does human capital efficiency impact credit risk?: the case of commercial banks in the GCC. *The Journal of Risk Finance*, 23(5): 639-651. <https://doi.org/10.1108/JRF-04-2022-0083>.
- Hull, J. C. y White A. (1995). The impact of default risk on the prices of options y other derivative securities. *Journal of Banking y Finance*, 19(2): 299-322. [https://doi.org/10.1016/0378-4266\(94\)00050-d](https://doi.org/10.1016/0378-4266(94)00050-d).
- Hull, J. C. y White, A. (2001). Valuing credit default swaps II: modeling default correlations. *Journal of Derivatives*, 8(3): 12-22. <https://doi.org/10.3905/jod.2001.319153>.
- Hunzingera, C. B. y Labuschagne, C. A. (2014). The Cox, Ross and Rubinstein tree model which includes counterparty credit risk and funding costs, *North American Journal of Economics and Finance*, 29: 200-217. <http://dx.doi.org/10.1016/j.najef.2014.06.002>.
- Jarrow, R. A. y Protter, P. (2004). Structural versus reduced form models: A new information based perspective. *Journal of Investment Management*, 2(2): 1-10. Disponible en: https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=555421. Consultado: 28/06/2023.
- Jarrow, R. A. y Turnbull, S. M. (1995). Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk. *Journal of Finance*, 50 (1): 53-85. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb05167.x>.

- Jarrow, R. A., Lyo, D. y Turnbull, S. M. (1997). A Markov model for the term structure of credit spreads. *Review of Financial Studies*, 10: 481-523. https://doi.org/10.1142/9789812819222_0018.
- Jones, E., Mason, S., y Rosenfeld, E. (1984). Contingent Claims Analysis of Corporate Capital Structures: An Empirical Investigation. *Journal of Finance*, 39(3): 611-625. https://doi.org/10.1142/9789814759601_0001.
- Jorion, P. (2007). *Financial Risk Manager Handbook*. John Wiley & Sons, Inc. Fourth Edition.
- Kealhofer, S. (2003). Quantifying Credit Risk II: Debt Valuation. *Financial Analysts Journal*, 59(3): 78-92. <https://doi.org/10.2469/faj.v59.n3.2534>.
- Kevkhashvili, R. (2022). A new approach to detecting change in credit quality. *Journal of Risk*, 24(5): 51-73. <https://doi.org/10.21314/JOR.2022.032>.
- Klieštika, T. y Cúgb, J. (2015). Comparison of Selected Models of Credit Risk, *Procedia Economics and Finance*, 23: 356-361. [https://doi.org/10.1016/S2212-5671\(15\)00452-9](https://doi.org/10.1016/S2212-5671(15)00452-9).
- Lando, D. (1998). On Cox processes and credit risky securities. *Review of Derivatives Research*, 2: 99-120. <https://doi.org/10.1007/bf01531332>.
- Litterman, R. B. y Iben, T. (1991). Corporate bond valuation and the term structure of credit spreads. *Journal of Portfolio Management*, 17(3): 52-64. <https://doi.org/10.3905/jpm.1991.409331>.
- Longstaff, F. y Schwartz, E. S. (1995). A Simple Approach to Valuing Risky Fixed and Floating Rate Debt. *The Journal of Finance*, 50 (3), 789-819. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1995.tb04037.x>.
- Madan, D. y Unal, H. (2000). A Two-Factor Hazard Rate Model for Pricing Risky Debt and the Term Structure of Credit Spreads. *The Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 35(1): 43-65. <https://doi.org/10.2307/2676238>.
- Merton, C. R. (1974). On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates. *Journal of Finance*, 449-470. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x>.
- Redondo, H. y Aracil, E. (2024). Climate-related credit risk: Rethinking the credit risk framework. *Global Policy*, 15(1): 21-33. <https://doi.org/10.1111/1758-5899.13315>.
- Sha, Y. (2022). Rating manipulation and creditworthiness for platform economy: Evidence from peer-to-peer lending. *International Review of Financial Analysis*, 84: 1-11. <https://doi.org/10.1016/j.irfa.2022.102393>.
- Vasicek, O. A. (1984). *Credit Valuation*. KVM Corporation. Disponible en: http://www.ressources-actuarielles.net/Credit_Valuation.pdf. Consultado: 28/06/2023.
- Yamanaka, S. y Kinoshita, M. (2022). A structural credit risk model based on purchase order information. *Journal of Credit Risk*, 18(1): 101-117. <https://doi.org/10.21314/JCR.2021.016>.

Anexo

Modelo binomial

Climent Hernández (2014) propuso un modelo donde el rendimiento es modelado con una caminata aleatoria y la valuación de opciones es realizada con la programación dinámica estocástica en tiempo discreto para maximizar el valor presente de los probables flujos de efectivo y cuantificar económicamente el riesgo considerado por el emisor para otorgar la cobertura con el contrato de la opción. El supuesto es que al final de cada estado (nodo) en el que es dividido el periodo de vigencia T , existen dos probables valores a partir del precio subyacente M_0 y por consecuencia dos valores de la opción europea $v(0, M_0)$, donde el periodo de vigencia de la opción es dividido en n intervalos homogéneos, entonces en la fecha de vencimiento T existen $n + 1$ probables valores del precio subyacente y $n + 1$ probables valores de la opción. En cada estado, el precio aumenta con probabilidad π de M_t a $M_t a$ o disminuye con probabilidad $\theta = 1 - \pi$ de M_t a $M_t d$, donde $0 < d < 1 < a$.

Si los probables precios subyacentes y valores de la opción en la fecha de vencimiento son conocidos, entonces el valor presente de la opción es estimado con un portafolio replicante (opción europea sintética) compuesto por: 1) la posición larga de Δ bienes subyacentes en valor presente a la tasa de interés de dividendos o la tasa de interés libre de riesgo extranjera, es decir:

$$\Delta M_t = \begin{cases} \Delta M_{t-1} a \exp(-rT) & \text{si } M_t \text{ aumenta} \\ \Delta M_{t-1} d \exp(-rT) & \text{si } M_t \text{ disminuye} \end{cases} \quad (23)$$

y 2) la posición corta de la opción que es necesario valorar, es decir:

$$-v(0, M_0) = \begin{cases} -\max(M_T - S, 0) & \text{si es una opción de compra} \\ -\max(S - M_T, 0) & \text{si es una opción de venta} \end{cases} \quad (24)$$

entonces la cobertura Δ que mantiene libre de riesgo el portafolio $\Pi_t = \Delta M_t - v(0, M_0)$ en el instante t es:

$$\Delta_t = \frac{v(t, M_t^a) - v(t, M_t^d)}{M_t^a - M_t^d} \quad (25)$$

donde Δ_t es la estrategia óptima, $v(t, M_t^a)$ es el valor de la opción europea cuando el precio aumenta, $v(t, M_t^d)$ es el valor de la opción europea cuando el precio disminuye, M_t^a es el precio subyacente cuando aumenta y M_t^d es el precio subyacente cuando disminuye en el instante t .

Si π es la probabilidad de que el precio subyacente aumente en cada estado, entonces el rendimiento subyacente esperado al final del intervalo δT es:

$$E(X) = a\pi + d(1 - \pi) = \exp(\mu\delta T) = u \quad (26)$$

donde $E(X)$ es el rendimiento esperado en el intervalo δT , donde $\delta = n^{-1}$. Las probabilidades neutrales al riesgo (martingalas) son:

$$\pi = \frac{u - d}{a - d} \quad y \quad 1 - \pi = \frac{a - u}{a - d} \quad (27)$$

donde $\delta = n^{-1}$ y $0 < d < 1 < a$. La varianza proporcional en el intervalo δT es:

$$\sigma^2 \delta T = \text{Var}(X) = (a - d)^2 \pi(1 - \pi) = (u - d)(a - u) \quad (28)$$

donde $\delta = n^{-1}$ y $0 < d < 1 < a$.

El sistema de ecuaciones (26) y (28) tiene una infinidad de soluciones. Si $ad = 1$, entonces despejando a la variable a es obtenida la siguiente ecuación:

$$a^2 - (\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)u^{-1}a + 1 = 0 \quad (29)$$

donde $A = 1$, $B = -(\sigma^2 \delta T + u^2 + 1)u^{-1}$ y $C = 1$, entonces la solución es:

$$a = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4}}{2} \quad y \quad d = \frac{-B - \sqrt{B^2 - 4}}{2} \quad (30)$$

Climent Hernández (2014) aplicó esta solución para la valuación de opciones americanas de venta y comparó los resultados con otros modelos.

Modelo general para la valuación de opciones europeas

El modelo general para la valuación de opciones europeas es:

$$v(0, M_0) = \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \pi^k (1-\pi)^{n-k} v(n, M_n^{a^k d^{n-k}}) \right) \exp(-iT)$$

$$v(n, M_n^{a^k d^{n-k}}) = \begin{cases} \max(Ma^k d^{n-k} - S, 0) & \text{si es una opción de compra} \\ \max(S - Ma^k d^{n-k}, 0) & \text{si es una opción de venta} \end{cases}$$

(31)

donde $\delta = n^{-1}$ y $0 < d < 1 < a$.

Modelo binomial complementario

Las opciones europeas están dentro de dinero si los enteros mínimos w satisfacen las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned} Ma^w d^{n-w} > S & \quad \text{si es una opción de compra} \\ Ma^w d^{n-w} < S & \quad \text{si es una opción de venta} \end{aligned}$$

(32)

donde los enteros w de aumentos son:

$$\begin{aligned} \min(w) &> \left\lceil \frac{n \log(a) + \log(S) - \log(M)}{2 \log(a)} \right\rceil & \text{si es una opción de compra} \\ \max(w) &< \left\lfloor \frac{n \log(d) - \log(S) + \log(M)}{2 \log(d)} \right\rfloor & \text{si es una opción de venta} \end{aligned}$$

(33)

entonces la función de distribución del modelo binomial complementario es:

$$B(w, n, \pi) = \sum_{k=w}^n \binom{n}{k} \pi^k \theta^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-w} \binom{n}{k} \theta^k \pi^{n-k} = B(n-w, \theta)$$

(34)

si $\tilde{\pi} = a\pi \exp(-i\delta T)$ y $\tilde{\theta} = 1 - \tilde{\pi} = d(1 - \pi) \exp(-i\delta T)$, entonces:

$$\tilde{\pi} = \frac{a - u^{-1}}{a - d} \quad y \quad \tilde{\theta} = 1 - \tilde{\pi} = \frac{u^{-1} - d}{a - d} \quad (35)$$

Por lo tanto, el modelo binomial complementario para la valuación de opciones europeas:

$$\begin{aligned} c(t, M_t) &= M_t \exp(-r\tau) B(n - w, \tilde{\theta}) - S \exp(-i\tau) B(n - w, \theta) \\ p(t, M_t) &= S \exp(-i\tau) \tilde{B}(n - w, \theta) - M_t \exp(-r\tau) \tilde{B}(w, n, \tilde{\theta}) \end{aligned} \quad (36)$$

donde $c(t, M_t)$ es una opción europea de compra, $p(t, M_t)$ es una opción europea de venta y $\tilde{B}(w, n, \pi) = 1 - B(w, n, \pi)$. Si $n \rightarrow \infty$, entonces el modelo binomial complementario converge al modelo de Merton (1974).

Concepto de griegas para el modelo binomial complementario

La delta es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del precio subyacente:

$$\Delta = \begin{cases} \exp(-r\tau) B(n - w, \tilde{\theta}) & \text{si es una opción de compra} \\ -\exp(-r\tau) \tilde{B}(w, n, \tilde{\theta}) & \text{si es una opción de venta} \end{cases} \quad (37)$$

La gama es el cambio proporcional de la delta con respecto al cambio proporcional del precio subyacente:

$$\Gamma = \frac{\exp(-r\tau) B'(n - w, \tilde{\theta})}{2M_t \log(a)} \quad (38)$$

La nu es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional de la volatilidad subyacente:

$$\nu = M_t \exp(-r\tau) \sqrt{\tau} B'(n - w, \tilde{\theta}) \quad (39)$$

La rho es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional de la tasa de interés libre de riesgo:

$$\rho = \begin{cases} ST \exp(-i\tau) B(n-w, \theta) & \text{si es una opción de compra} \\ -ST \exp(-i\tau) \tilde{B}(n-w, \theta) & \text{si es una opción de venta} \end{cases} \quad (40)$$

La theta es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del tiempo transcurrido:

$$\Theta = \begin{cases} -iS \exp(-i\tau) B(n-w, \theta) - \frac{\sigma M_t \exp(-r\tau) B'(n-w, \tilde{\theta})}{4\sqrt{\tau}} \\ -iS \exp(-i\tau) \tilde{B}(n-w, \theta) + \frac{\sigma M_t \exp(-r\tau) B'(n-w, \tilde{\theta})}{4\sqrt{\tau}} \end{cases} \quad (41)$$

La kappa es el cambio proporcional de la valuación de la opción con respecto al cambio proporcional del precio de liquidación:

$$\kappa = \frac{\Delta v(t, M_t)}{\Delta S} = \begin{cases} -\exp(-i\tau) B(n-w, \theta) & \text{si es una opción de compra} \\ \exp(-i\tau) \tilde{B}(n-w, \theta) & \text{si es una opción de venta} \end{cases} \quad (42)$$

Si el modelo binomial satisface la siguiente suposición:

$$\begin{aligned} \Delta A_t &= \mu_A A_t \Delta t + \sigma_A A_t \Delta W_{A_t} \\ \Delta C_t &= \mu_C C_t \Delta t + \sigma_C C_t \Delta W_{C_t} \end{aligned} \quad (43)$$

donde $\Delta W_t = \Delta W_{A_t} = \Delta W_{C_t}$ y existe una correlación positiva y fuerte en la ecuación (43), es decir, $\rho(V_t, A_t) \rightarrow 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \mu_C C_t &= \Theta + \mu_A A_t \Delta + \frac{\sigma_A^2 A_t^2 \Gamma}{2} = iS\kappa + \mu_A A_t \Delta \\ \sigma_C C_t &= \sigma_A A_t \Delta \end{aligned} \quad (44)$$

Por lo tanto, es posible estimar μ_A y el modelo binomial complementario analizado, satisface la ecuación (10).

Capital como una opción europea de compra posición larga

Si $A_t = P_t + C_t$, entonces $C_t = A_t - P_t$, por lo tanto:

$$C_t = A_t B(n - w, \tilde{\theta}) - P_t B(n - w, \theta) \quad (45)$$

donde $B(n - w, \theta) = B(w, n, \pi)$ es la distribución del modelo binomial complementario.

Pasivo como una opción europea de venta posición corta

Si $P_t = A_t - C_t$, entonces la nota estructurada con opciones europeas es $P_t = A_t - c(t, A_t)$:

$$P_t = A_t - (A_t B(n - w, \tilde{\theta}) - P_t B(n - w, \theta)) = A_t \tilde{B}(n - w, \tilde{\theta}) + P_t B(n - w, \theta) \quad (46)$$

Equivalentemente, la nota estructurada con opciones europeas es $\Pi_t = P_t - p(t, A_t)$:

$$\Pi_t = P_t - (P_t \tilde{B}(n - w, \theta) - A_t \tilde{B}(n - w, \tilde{\theta})) = P_t B(n - w, \theta) + A_t \tilde{B}(n - w, \tilde{\theta}) \quad (47)$$

Probabilidad de incumplimiento

La probabilidad de incumplimiento es equivalente a que la opción europea de compra esté fuera de dinero, es decir, $A_T < S$ o que la opción europea de venta esté dentro de dinero, es decir, $A_T < S$:

$$P(A_T < S) = \begin{cases} 1 - B(n - w, \theta) = 1 - \kappa \exp(iT) & \text{si es una opción de compra} \\ \tilde{B}(n - w, \theta) = \kappa \exp(iT) & \text{si es una opción de venta} \end{cases} \quad (48)$$