



# Disminuir el costo de las pensiones: una alternativa desde los mercados financieros de Colombia y México

*Lowering the cost on pension funds: An alternative from the financial markets of Colombia and Mexico*

Gabriel Alberto Agudelo-Torres<sup>1</sup>, Nora Gavira-Durón<sup>2\*</sup>,  
Luis Ceferino Franco-Arbeláez<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Instituto Tecnológico Metropolitano, Colombia

<sup>2</sup>Universidad de las Américas Puebla, México

Recibido el 26 de marzo de 2019; aceptado el 17 de octubre de 2019

Disponible en Internet el: 21 de octubre de 2019

## Resumen

Un elemento determinante para las finanzas públicas de los países latinoamericanos es la estimación del monto de reservas actuariales de pensiones, financiadas total o parcialmente por gobiernos centrales, federales y regionales. Se propone una estrategia de gestión de portafolios pensionales, que considera la dinámica estocástica de los precios de los activos e integra una estrategia de cobertura dinámica que permite reducir el costo de las rentas vitalicias; aplicado a Colombia y México. La estrategia representa a Colombia un ahorro promedio en el gasto público de 28.64% (4,583 millones de dólares estadounidenses aproximadamente) y para México un ahorro de 51.92% (22,690 millones de dólares estadounidenses aproximadamente). Es relevante porque permitiría liberar recursos públicos invertidos en reservas actuariales pensionales o vigencias futuras, con beneficios fiscales y sociales que ello conlleva, al dar soporte a una mayor cobertura de los sistemas de retiro o utilizarlos en otras necesidades de la población.

---

\* Autor para correspondencia

Correo electrónico: aseunam53@yahoo.com.mx (N. Gavira-Durón).

La revisión por pares es responsabilidad de la Universidad Nacional Autónoma de México.

<http://dx.doi.org/10.22201/fca.24488410e.2020.2507>

0186- 1042/© 2019 Universidad Nacional Autónoma de México, Facultad de Contaduría y Administración. Este es un artículo Open Access bajo la licencia CC BY-NC-SA (<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>)

*Código JEL:* C22, G22, H55

*Palabras clave:* Reservas actuariales; Cobertura pensional; Derivados financieros; Sistemas pensionales

## **Abstract**

A relevant factor for the public finances of Latin American countries is the approximate calculation on the amount of pension funds actuarial reserves, financed through central, federal and regional entities. This article proposition is the strategy on the administration of pension fund portfolios, considering the asset pricing's stochastic dynamic and integrating an approach on dynamic coverage these two elements allow to lower the cost on annuities applied to Colombia and Mexico. From Colombia, the strategy on pension fund administration saves approximately 28.64% of the public expense (4,583 million US dollars); for the case of Mexico, the saving is about 51.92% (22,690 million US dollars). The approach is relevant since it could liberate public resources invested in federal pension fund reserves with not only tax benefits but also social benefits mainly. The pension fund population may grow or even the resources invested could be redirected for other important people's needs.

*JEL code:* C22, G22, H55

*Keywords:* Actuarial reserves; Pension coverage; Financial derivatives; Pension systems

---

## **Introducción**

Para las compañías de seguros, gobiernos y entidades públicas y privadas que tienen a su cargo el pago de pensiones de vejez, vida o invalidez, el cálculo de la reserva actuarial necesaria para cubrir la totalidad de los pagos de una renta vitalicia es un tema fundamental. Existen trabajos que muestran que, en los países latinoamericanos, no es suficiente la pensión obtenida por los trabajadores al momento de su jubilación, como son los desarrollados por Gómez & Kato (2008), donde analizan qué tan competitivas son las pensiones en México comparadas con las que se otorgan en otros países de América Latina, y sus resultados muestran que las comisiones cobradas son más altas en México que en Argentina y Chile, lo que implica que la pensión mensual que obtiene el trabajador al momento de jubilarse sea menor en México; por tanto menos competitiva, que en los otros países. Duque, Quintero, & Gómez (2013) analizan el régimen subsidiado pensional colombiano desde el punto de vista de la eficacia del principio de universalidad, determinan que dicho régimen no es una herramienta eficaz para que sus beneficiarios puedan acceder a una pensión y Villagómez (2014) muestra que en general los individuos no tienen el ahorro necesario para su retiro, se encuentran en países desarrollados o no, en particular en el caso mexicano.

Mientras que Martínez & Venegas (2014) analizan el riesgo de mercado de los fondos de inversión: Siefore básica 1 (SB1) y Siefore básica 2 (SB2), mediante un índice de rendimientos incluidos en modelos ARIMA-GARCH, muestran que los rendimientos obtenidos son insuficientes para compensar el riesgo adicional asumido por los fondos de pensiones de renta variable; así como Damián (2016) trabaja sobre los inicios del nuevo sistema de pensiones en México, muestra la reducción en los beneficios de los futuros pensionados, debido a dicha reforma y analiza la pobreza generada a la población en edad de retiro, con respecto a las pensiones, contributivas y no contributivas. Bernal (2016) analiza los factores que explican el gasto en pensiones y proyecta su evolución al año 2075 en cuatro países de América Latina: Chile, Perú, Colombia y México, encuentra que el gasto de pensiones con respecto al PIB está entre 1,8 y 6,4%, pero se incrementará el doble y cuatro veces más en 2075, principalmente por el envejecimiento de la población; y Castañón & Ferreira (2017) muestran resultados de la densidad de cotización considerando diferentes cohortes de trabajadores que cotizan a las Afores y concluyen que los montos de cotización de dichos trabajadores son bajos y son insuficientes para una pensión digna.

Para los gobiernos, la estimación del monto de la reserva actuarial necesaria para cubrir la totalidad de los pagos de una renta vitalicia afecta directamente la cobertura y la estabilidad de los sistemas de pensiones y, por tanto, la sostenibilidad fiscal de los países que otorgan o subsidian las rentas vitalicias de la población; un desequilibrio en dicho sistema, afecta la sostenibilidad de las entidades que tienen a su cargo obligaciones pensionales, con probables desestabilizaciones sistémicas en la economía Grinols & Turnovsky (1993), Schmedders (1998). En el caso mexicano Banda & Gómez (2009) analizan el desempeño de las Sociedades de Inversión Especializadas en Fondos para el Retiro en México (Siefores) mediante los índices de Sharpe, Treynor y Jensen; concluyen que existe escasa relación entre los rendimientos del mercado y los rendimientos de las Afores y se espera que el riesgo asociado a las Siefores 3, 4 y 5 aumente, así como los rendimientos de los trabajadores, que son muy bajos.

El cálculo actuarial plantea que la estimación de las reservas de dinero, necesarias para soportar el pago de una renta vitalicia, se efectúa sumando los valores actuales esperados de los pagos futuros Bowers et al. (1997). En este cálculo intervienen diversas variables, tales como la probabilidad de vivir del individuo, la inflación, la edad, el monto del pago futuro posible y la tasa de interés de descuento; esta estimación no incluye la estructura estocástica de los activos incluidos en el portafolio, ni del portafolio total en el cual está invertida la reserva actuarial, por lo que los análisis se enmarcan en un mundo determinista.

## **Antecedentes y objetivos**

Las metodologías de administración de portafolios basadas en coberturas mediante derivados financieros han sido ampliamente tratadas en la literatura. Especialmente desde la publicación de los modelos de Black & Scholes (1973) y de Merton (1973), estas estrategias son comúnmente utilizadas en los mercados financieros tanto para acciones, como lo indican Jarrow & Turnbull (1999); así como para bonos y demás títulos de renta fija, Jarrow (2002). Estrategias de ese tipo también han sido aplicadas en el contexto de los mercados de commodities; por ejemplo, para el caso de la energía eléctrica, Nässäkkälä & Keppo (2005). En diversos artículos, se ha abordado el estudio de fenómenos financieros a través de la dinámica estocástica de los precios, algunos de los trabajos con este tipo de enfoque son Merton (1973), Black & Scholes (1973), Vasicek (1977), Cox & Ross (1976), Cox et al. (1985a) y (1985b), Hull & White (1990) y (1993), Black et al. (1990) y Heath et al. (1992).

El presente trabajo tiene por objetivo desarrollar un modelo para estimar la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida, utilizando procesos estocásticos; se plantea a partir de una estrategia de cobertura dinámica asociada a un derivado financiero, en dónde, dicha cobertura garantiza un valor futuro de la reserva para cada desembolso mayor, o por lo menos igual al pago a realizar. En la Sección 3, se presenta el modelo y en la Sección 4 se analizan los resultados de su implementación al Fondo de Pensiones de las Entidades Territoriales de Colombia y a los Fondos para el retiro de los trabajadores afiliados al Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) y al Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE) en México. Finalmente, en la Sección 5, se exponen algunas conclusiones.

## **El método**

El modelo propuesto en esta sección, parte de la estimación de la reserva actuarial necesaria para soportar el pago de una renta vitalicia y de la descomposición de la obligación del pagador en una opción call en posición larga y una opción put en posición corta para cada uno de los desembolsos futuros. Posteriormente, se presenta una ecuación para estimar el valor presente de los excedentes del pagador de la renta cuando el valor reservado excede el monto a pagar. Además, se presenta una estrategia de cobertura dinámica, que a través de una opción put sintética, que permite anular cualquier déficit en la reserva actuarial para cada pago, generando excedentes en la mayoría de los casos. Dichos excedentes son valorados mediante el modelo de Cox, Ingersoll & Ross (1985b) y son restados al cálculo inicial de la

reserva necesaria, junto con los costos generados por la cobertura dinámica (o sumados si se trata de ingresos).

### *Reserva necesaria para una renta vitalicia calculada a una vida*

Una Renta Vitalicia, es un pago periódico de una pensión, durante toda la vida del pensionado; su cálculo, depende de su esperanza de vida. En los siguientes apartados se determinan los elementos necesarios para calcular la cantidad de dinero necesaria para respaldar el pago de una renta vitalicia utilizando la cobertura dinámica propuesta.

### *Probabilidad de sobrevivir*

Sea  $S(x)$  una función de sobrevivencia que indica la probabilidad de que la edad de muerte ( $X$ ) de una persona en particular sea mayor a una edad  $x$ . Por lo tanto:

$$S(x) = P(X > x) \quad (1)$$

Se define  ${}_t p_x$  como la probabilidad que tiene una persona de edad  $x$  de no fallecer en los próximos  $t$  años y  ${}_t q_x$  como la probabilidad de fallecer en el mismo período. De acuerdo con esta definición se tiene que:

$${}_t p_x = P(X > x + t | X > x) \quad (2)$$

$${}_t p_x = \frac{P(X > x \cap X > x + t)}{P(X > x)} \quad (3)$$

$${}_t p_x = \frac{P(X > x + t)}{P(X > x)} \quad (4)$$

$${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)} \quad (5)$$

Estas probabilidades pueden ser calculadas a través de tablas de mortalidad, las cuales son modelos de sobrevivencia presentados en forma tabular e ilustran el número de sobrevivientes de un grupo inicial, denotado como  $l_0$ , desde una edad particular  $x$  hasta la edad límite  $w$ .  $l_0$  es la raíz de la tabla o grupo inicial y  $l_x$  es la cantidad estimada de sobrevivientes para la edad  $x$ . La relación entre la constante  $l_0$  y la variable  $l_x$  está determinada por la siguiente ecuación:

$$l_x = S(x) * l_0 \quad (6)$$

como,  ${}_t p_x = \frac{S(x+t)}{S(x)}$  y  $l_x = S(x) * l_0$  y, entonces,

$$S(x) = \frac{l_x}{l_0} \tag{7}$$

por lo tanto,

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \tag{8}$$

### Cálculo de la reserva actuarial

La reserva necesaria para el pago de una renta vitalicia es la suma de los valores presentes esperados de los pagos posibles Bowers *et al.*, (1997). Se supone una renta vitalicia con una indemnización que aumenta en el mismo porcentaje que el nivel general de precios y que inicialmente corresponde a un valor  $D_0$  en caso de no fallecer y de cero (0) en caso de fallecer.

$$R_N = E(Pago_0)(1+r)^{-0} + E(Pago_1)(1+r)^{-1} + E(Pago_2)(1+r)^{-2} + \dots + E(Pago_{(w-\phi)})(1+r)^{-(w-\phi)} \tag{9}$$

$$R_N = (D_0 {}_0 p_x + {}_0 q_x)(1+r)^{-0} + (D_1 {}_1 p_x + {}_0 q_x)(1+r)^{-1} + (D_2 {}_2 p_x + {}_0 q_x)(1+r)^{-2} + \dots + (D_{(w-x)} {}_{(w-x)} p_x + {}_0 q_x)(1+r)^{-(w-x)} \tag{10}$$

donde:

$D_t$ : Monto de la mesada en un instante  $t$ .

$r$ : Tasa de interés nominal.

$x$ : Edad actual del asegurado.

$w-x$ : Tiempo máximo que el asegurado puede vivir.

$R_N$  Reserva necesaria para el pago de una renta vitalicia.

Entonces,

$$R_{Nt} = \sum_{t=0}^{w-x} D_t {}_t p_x (1+r\%)^{-t} \tag{11}$$

En tiempo continuo puede expresarse de la siguiente forma:

$$R_{Nt} = \int_0^{w-x} D_t {}_t p_x e^{-rt} dt \tag{12}$$

### Combinación de opciones como representación del pago de una renta

Sea  $V_t$  el valor del fondo necesario para soportar el pago futuro  $D_T$ , que se ejecuta siempre y cuando la persona de edad  $x$  sobreviva por lo menos  $T-t$  años más. Por lo tanto, el valor de dicho fondo corresponde al valor presente actuarial:

$$V_t = D_{T(T-t)} p_x e^{-r(T-t)} \tag{13}$$

donde  $r$  es la tasa de interés técnico nominal utilizada para el cálculo actuarial y  ${}_{(T-t)}p_x$  es la probabilidad de que una persona de edad  $x$  sobreviva por lo menos  $T - t$  años más. Se supone que  $V_t$  es conducido por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (EDE):

$$dV_t = rV_t dt + \sigma_v V_t dW_t \quad (14)$$

Si  $V_T < D_T$ , se incumpliría con el pago o se tomaría dinero de la reserva para otro pago, desfinanciando así la reserva total. Además, no habría ningún tipo de excedente, que se denota como  $S_T$ , en el portafolio que respalda la renta vitalicia; es decir,  $S_T = 0$ . Por otra parte, si  $V_T \geq D_T$  se cumple con el pago y por lo tanto el excedente sería  $S_T = V_T - D_T$ . En consecuencia, se sigue que:

$$S_T = \max(V_T - D_T, 0) \quad (15)$$

Esto corresponde al pago en la fecha de vencimiento  $T$  de una opción de compra (call). Con base en las ecuaciones de Black & Scholes (1973) y Merton (1973), y suponiendo que la reserva para la renta vitalicia tiene una rentabilidad, denotada por  $r$ , igual a la tasa libre de riesgo, se tiene que:

$$S_t = V_t \Phi(d_{1,t}) - D_T e^{-r(T-t)} \Phi(d_{2,t}) \quad (16)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}} \quad (17)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v \sqrt{T-t} \quad (18)$$

y  $\Phi(x)$  es la probabilidad de que una variable normalmente distribuida con media cero y desviación estándar uno sea menor que  $x$ .

A partir de  $V_t = D_T {}_{(T-t)}p_x e^{-r(T-t)}$ , se tiene que:

$$d_1 = \frac{\ln\left({}_{(T-t)}p_x e^{-r(T-t)}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}} \quad (19)$$

Si  $V_t > D_t$ , el faltante está dado por  $F_T = D_T - V_T$ . En caso contrario el faltante es cero ( $F_T = 0$ ). Por lo tanto, se tiene que:

$$F_T = \max(D_T - V_T, 0) \quad (20)$$

y que

$$F_t = D_T e^{-r(T-t)} \Phi(-d_{2,t}) - V_t \Phi(-d_{1,t}) \quad (21)$$

con

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{D_T}{V_t}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v\sqrt{T-t}} \quad (22)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma_v\sqrt{T-t} \quad (23)$$

Como el pagador de la obligación debe cubrir con sus propios recursos el posible faltante o bien quedarse con el posible excedente, entonces se tiene una opción call en posición larga y una opción put en posición corta, ambas sin costo con subyacente  $V_t$  y precio de ejercicio  $D_t$ . Un ejercicio similar al expuesto lo desarrolla Neftci (2008), creando una opción put en posición larga a partir de una call larga y una venta en corto del activo subyacente.

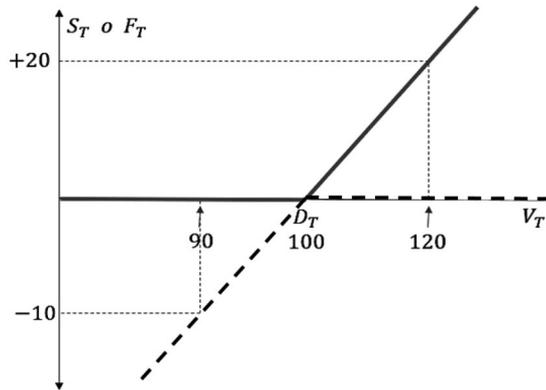


Figura 1. Superávit o déficit de una renta vitalicia para un pagador de pensiones y su descomposición como una opción call en posición larga y una opción put en posición corta.

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Por lo tanto, el valor del portafolio de opciones en el tiempo  $t$  satisface la condición de paridad *put-call*:

$$S_t - F_t = V_t - D_T * e^{-r*(T-t)} \quad (24)$$

La ganancia obtenida es la diferencia entre  $V_t$  y el pago  $D_T$  a realizar, descontado a una tasa de rentabilidad igual al parámetro de tendencia de la EDE que describe el cambio en  $V_t$ .

*Valuación de  $S_t$  a partir de un modelo de riesgo de crédito*

Siguiendo a Merton (1974), citado por Venegas (2008), es posible calcular la probabilidad de incumplir total o parcialmente con el pago  $D_T$ , con base en la siguiente deducción, se sabe que  $S_T = \max(V_T - D_T, 0)$ , entonces:

$$S_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} S_T f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \tag{25}$$

$$S_t = e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{\infty} \max(v - D_T, 0) f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \tag{26}$$

$$S_t = e^{-r(T-t)} \int_D^{\infty} v f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv - D_T e^{-r(T-t)} \int_{\{v > D_T\}} f_{V_T|V_t}(v|V_t) dv \tag{27}$$

$$S_t = e^{-r(T-t)} E[V_{T\{v > D_T\}}|V_t] - D_T e^{-r(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\} \tag{28}$$

donde  $f_{V_T|V_t}(v|V_t)$  es la función de densidad de probabilidad de  $V_T$ , condicional al valor inicial  $v_t$ .

En este caso la probabilidad de que no haya incumplimiento en el pago futuro  $D_T$ , dado el valor actual de la reserva para dicho pago  $V_t$  es  $\mathbb{P}\{V_T > D_T|V_t\}$ .

*Déficits de reserva y una cobertura dinámica*

Para determinar el monto de la reserva constituida debe considerarse a la obligación como la combinación de una opción *call* en posición larga con una *put* en posición corta. En ese sentido, una cobertura dinámica implica encontrar un portafolio óptimo en el cual el riesgo de mercado sea eliminado cuando  $V_T < D_T$ . Se considera el portafolio  $\Pi_t$  conformado por  $w_1$  unidades de posiciones cortas en la reserva  $V_t$  y  $w_2$  y opciones put ( $F_t$ ) en posición corta.

$$\Pi_t = -w_1 V_t - w_2 F_t \tag{29}$$

El cambio en el valor del portafolio está dado por

$$d\Pi_t = -w_1 dV_t - w_2 dF_t \tag{30}$$

el Lema de Itô proporciona la EDE que describe el cambio en  $F_t$ .

$$dF_t = \left( \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial v_t} r V_t + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial v_t^2} \right) dt + \frac{\partial F}{\partial v_t} \sigma_v V_t dW_t \tag{31}$$

reemplazando  $dV_t$  y  $dF_t$  en  $d\Pi_t$  se obtiene:

$$d\Pi_t = \left(-w_1 - w_2 \frac{\partial F}{\partial t}\right) rV_t dt + \left(-w_1 - w_2 * \frac{\partial F}{\partial V_t}\right) \sigma_v V_t dW_t - w_2 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma_v^2 V_t^2 \frac{\partial^2 F}{\partial V_t^2}\right) dt \quad (32)$$

Para eliminar el riesgo de mercado, si se hace  $w_2 = 1$ , es necesario que  $-w_1 = \frac{\partial F}{\partial V_t}$ , y como  $F_t = D_T e^{-r(T-t)} \Phi(-d_{2,t}) - V_t \Phi(-d_{1,t})$ , entonces:

$$\frac{\partial F}{\partial V_t} = -1 + \Phi(d_{1,t}) \quad (33)$$

por lo tanto,

$$w_1 = 1 - \Phi\left(\frac{\ln\left(\frac{V_t}{D_T}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma_v^2\right)(T-t)}{\sigma_v \sqrt{T-t}}\right) \quad (34)$$

Es decir, por cada opción *put* en posición corta contenida en el portafolio (o en forma equivalente, por cada obligación de pagar  $D_T$  en el tiempo  $T$ ), en el instante  $t$  se debe tener en posición corta un porcentaje sobre la reserva  $V_t$  igual a  $1 - \Phi(d_{1,t})$ . De no ser posible tal posición, se utiliza un activo  $Z$  tal que  $\text{Corr}(V_t, Z_t) \approx 1$ . La estrategia anterior constituye una cobertura delta para una opción *put* en posición corta.

El riesgo que se asume en una sucesión de pagos  $D_T$ , con  $T = 1, 2, 3, \dots, n$ , es equivalente a tener un portafolio conformado por opciones *call* en posición larga sin costo alguno, cuya valuación individual viene dada simultáneamente por las siguientes dos ecuaciones, ya expuestas en las secciones 2.2 y 2.3 respectivamente (ecuaciones 16 y 28)

$$S_t = V_t \Phi(d_{1,t}) - D_T e^{-r(T-t)} \Phi(d_{2,t}) \quad (35)$$

y

$$S_t = e^{-r(T-t)} E[V_{T\{v>D_T\}} | V_t] - D_T e^{-r(T-t)} \mathbb{P}\{V_T > D_T | V_t\} \quad (36)$$

de lo anterior se deduce que

$$V_t \Phi(d_{1,t}) = e^{-r(T-t)} E[V_{T\{v>D_T\}} | V_t] \quad (37)$$

el valor esperado condicional de la reserva para el vencimiento, viene dado por:

$$E[V_{T\{v>D_T\}} | V_t] = V_t \Phi(d_{1,t}) e^{r(T-t)} \quad (38)$$

Valoración de un bono (Cox-Ingersoll-Ross)

Suponga que la tasa de interés de la economía sigue un proceso de la forma:

$$dr = a(b - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dW_t \tag{39}$$

Entonces, el precio de un bono cupón cero viene determinado por el siguiente conjunto de ecuaciones propuesto por Cox, Ingersoll & Ross (1985b).

$$B(r, t; T) = e^{A(t;T) - rD(t;T)} \tag{40}$$

$$A(t; T) = \ln \left[ \left( \frac{2\sqrt{a^2+2\sigma_r^2} e^{(a+\sqrt{a^2+2\sigma_r^2})(T-t)/2}}{(a+\sqrt{a^2+2\sigma_r^2})(e^{\sqrt{a^2+2\sigma_r^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2+2\sigma_r^2}} \right)^{2ab/\sigma_r^2} \right] \tag{41}$$

$$D(t; T) = \frac{2 \left( e^{\sqrt{a^2+2\sigma_r^2}(T-t)} - 1 \right)}{(a+\sqrt{a^2+2\sigma_r^2})(e^{\sqrt{a^2+2\sigma_r^2}(T-t)} - 1) + 2\sqrt{a^2+2\sigma_r^2}} \tag{42}$$

Dado que la cobertura dinámica propuesta genera excedentes en la reserva constituida (ahorro generado), se propone que estos flujos de efectivo sean valorados mediante el modelo mencionado. Esta valoración permite cuantificar a valor presente estos flujos futuros, permitiendo así, ajustar la reserva actuarial necesaria para soportar el pago de la renta vitalicia.

Ahorro generado

A través de la cobertura dinámica es imposible, en teoría, que la reserva actuarial para el pago sea inferior al mismo, es decir  $V_T < D_T$ ; por lo tanto, en el peor de los casos  $V_T$  es igual a  $D_T$  y en el mejor se presenta un sobrante de dinero. El valor de dichos sobrantes en el presente es el ahorro en la reserva actuarial total producto de la cobertura. Este ahorro, denotado  $Ah$ , es igual al valor de un bono cuyos cupones corresponden al sobrante en cada periodo. Este valor puede ser estimado mediante el modelo de tasa corta de Cox, Ingersoll, & Ross (1985b), de la Sección 2.4.

$$Ah = \int_0^{w-x} E(V_{T\{v>D_T\}}|V_t)B(r, t, T)dT \tag{43}$$

$$Ah = \int_0^{W-x} V_t \Phi(d_{1,t}) e^{r(T-t)} e^{A(t;T)-rD(t;T)} dT \quad (44)$$

*Ingresos/Costos asociados a la cobertura dinámica*

La cobertura dinámica propuesta, realizada para cada pago, genera en cada transacción un ingreso o un costo derivado de su misma operación. En el tiempo cero ( $t=0$ ), este ingreso o costo es igual al valor del portafolio en ese mismo momento multiplicado por la cantidad de unidades vendidas del mismo, que en este caso es  $\Delta_0$  en cero (0), menos el costo asociado a la tasa de interés del crédito. Esto es:

$$I_0 = V_0 U_0 - C_0 \quad (45)$$

Como  $U_0 = \Delta_0$  y  $C_0 = V_0 \Delta_0 \frac{i\%}{252}$ , entonces:

$$I_0 = V_0 \Delta_0 \left(1 - \frac{i\%}{252}\right) \quad (46)$$

Por otra parte, el ingreso/costo en el momento  $t$  es:

$$I_t = I_{t-1} \left(1 + \frac{i\%}{252}\right) + V_t U_t - C_t \quad (47)$$

$$I_t = I_{t-1} \left(1 + \frac{i\%}{252}\right) + V_t U_t - I_{t-1} V_t U_t \frac{i\%}{252} \quad (48)$$

como  $U_t = \Delta_{t-1} - \Delta_t$ , entonces

$$I_t = I_{t-1} \left(1 + \frac{i\%}{252}\right) + V_t (\Delta_{t-1} - \Delta_t) - I_{t-1} V_t (\Delta_{t-1} - \Delta_t) \frac{i\%}{252} \quad (49)$$

Por lo tanto, el ingreso/costo en el tiempo  $T - 1$  es:

$$I_{T-1} = I_{T-2} \left(1 + \frac{i\%}{252}\right) + V_{T-1} (\Delta_{T-2} - \Delta_{T-1}) - I_{T-2} V_{T-1} (\Delta_{T-2} - \Delta_{T-1}) \frac{i\%}{252} \quad (50)$$

y en el tiempo  $T$ :

$$I_T = V_T \int_0^{T-1} (\Delta_{k-1} - \Delta_k) dk \quad (51)$$

entonces, el ingreso o costo total es:

$$(I/C)_T = I_{T-1} - I_T \quad (52)$$

En caso de ser negativo el resultado, se entiende que la cobertura genera costo, no ingreso.

### *Utilidad (UT) generada*

La cobertura dinámica realizada para cada pago posible, tiene un ingreso o costo que es valorado mediante el modelo de tasa corta de la sección 2.5 (Valoración de un bono).

$$UT = \int_0^{w-x} (I/C)_T B(r, t, T) dT \quad (53)$$

$$UT = \int_0^{w-x} (I/C)_T e^{A(t;T) - rD(t;T)} dT \quad (54)$$

### *Reserva necesaria*

La cantidad de dinero necesaria para respaldar el pago de una renta vitalicia utilizando la cobertura dinámica es entonces:

$$R_N = \int_0^{w-x} D_{T(T-t)} p_x e^{-r^*(T-t)} dT - Ah - UT \quad (55)$$

## **Resultados de los casos de estudio**

El sistema de pensiones vigente en Colombia, desde 1993 (Ley 100), se genera como una medida para terminar con los múltiples sistemas de pensiones que hasta ese momento existían. Hoy en día, para la mayoría de la población colombiana, coexisten dos regímenes: el Régimen de Ahorro Individual con Solidaridad (RAIS), que es el esquema de las administradoras de fondos de pensiones privadas (AFP) y, el Régimen Solidario de Prima Media con Prestación Definida (RPM), que es operado por la administradora pública de Colpensiones. Sin embargo, aún se pagan rentas vitalicias a personas que cotizaron a otros regímenes, como los ofrecidos por las entidades territoriales (municipios y departamentos), cuyas reservas actuariales no igualan aún los pasivos pensionales de dichas unidades administrativas. Así mismo, en el caso mexicano, el cambio al nuevo sistema de pensiones de la Ley 97, deja al gobierno con un déficit de las pensiones de los trabajadores que se encuentran afiliados con la ley anterior, ya que se trata de un sistema de beneficio definido; por lo tanto, la carga del pago de dichas pensiones correrá a cargo por el gobierno federal.

Por lo anterior, la relevancia del presente artículo, que determina una solución al déficit que podrían tener estas naciones por el pago de sus pensiones.

*Fondo de Pensiones de las Entidades Territoriales de Colombia*

En Colombia, el Fondo de Pensiones de las Entidades Territoriales (FONPET) es un fondo establecido por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público para apoyar el pago de las pensiones de ex empleados de las divisiones territoriales del país. El FONPET se define como “*un fondo sin estatus legal administrado por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público, que tiene como objetivo recaudar y asignar recursos a las cuentas de las entidades territoriales y administrar los recursos a través de los patrimonios autónomos*”, Dirección de Inversiones y Finanzas Públicas (2017). Actualmente, el FONPET administra aproximadamente 16,000 millones de dólares estadounidenses, siendo el fondo más grande y relevante del país. La estabilidad financiera de los departamentos, municipios y otras entidades gubernamentales, depende en gran medida de la correcta administración de ese fondo.

La Figura 2 muestra la evolución del precio de la unidad de FONPET desde el 1 de febrero de 2018 hasta el 31 de enero de 2019. En este período, su rentabilidad anual fue  $\hat{\mu}_v=3.81\%$  y su volatilidad anual  $\hat{\sigma}_v=1.19\%$ , por lo que la ecuación diferencial estocástica que sigue el precio de la unidad es:

$$dV_t = 0,0381V_t dt + 0,0119V_t dW_t \quad (56)$$

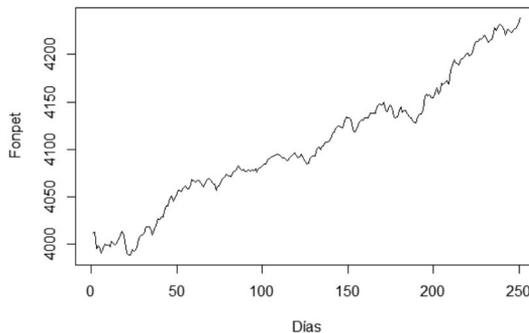


Figura 2. Valor de unidad del FONPET (01/02/2018-31/01/2019)

Fuente: Elaboración propia con datos del FONPET, R-Project

En esta sección se utilizaron las tablas de mortalidad oficiales para Colombia que se muestran en el Anexo 1 y se considera un hombre de 60 años de edad cuyos pagos mensuales (mesadas pensionales) crecen anualmente el 3.5%, siendo el primer pago anual correspondiente a 7,000

USD; así mismo, se considera a una mujer con exactamente las mismas características. Un cálculo actuarial realizado con la metodología propuesta por Bowers, et al. (1997) arroja un valor de reserva actuarial de 156,467 USD con una tasa de interés técnico del 3.81% nominal anual para el hombre y de 182,484 USD para la mujer.

Asumiendo que la tasa de interés del bono a 10 años, emitido por el Ministerio de Hacienda y Crédito Público de Colombia, sigue un proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), se obtiene una estimación de los parámetros. Para ello se utiliza el método del Hessiano, expuesto por Remillard (2016) y la función *est.cir* de R-project.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma_r \sqrt{r} dW_t \quad (57)$$

$$dr = 0,04919(0,063892 - r)dt + 0,006308\sqrt{r}dW_t \quad (58)$$

Luego de 1,000 iteraciones, se observa que en todos los casos se presenta una disminución en el capital requerido para financiar la renta vitalicia; también se muestra, por sexo, la disminución en la reserva actuarial necesaria por cada iteración realizada. Como se muestra en la Figura 3.

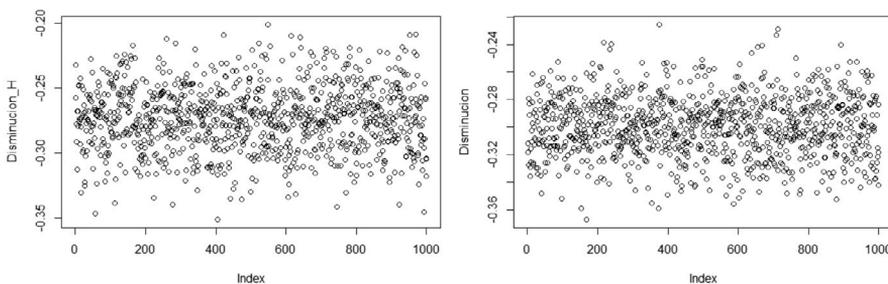


Figura 3. Disminución, por sexo, en la reserva actuarial necesaria por cada iteración (hombres a la izquierda, mujeres a la derecha).

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Para el hombre, la menor disminución es de 20.09% y la mayor de 35.11%; para la mujer, la menor es de 22.54% y la mayor es de 36.73%, como se observa en la Tabla 1.

Tabla 1

Mínimo, primer cuartil, mediana, media, tercer cuartil y máximo del ahorro generado por el modelo propuesto

Sexo	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
Hombre	-0.3511185	-0.2893935	-0.2726112	-0.273163	-0.2570137	-0.2009618
Mujer	-0.3672644	-0.3135634	-0.2992640	-0.29937	-0.2846892	-0.2253949

Fuente: Elaboración propia, R-Project

La disminución promedio es de 27.32% para el hombre, lo cual representa un ahorro de 42,741 USD, pasando de una reserva actuarial de 156,467 USD a una de 113,726 USD. Para la mujer, la disminución promedio es de 29.93%, pasando de una reserva actuarial de 182,484 USD a una de 127,854 USD, lo cual representa un ahorro de 54,630 USD.

En la figura 4 se muestra el diagrama de caja (*boxplot*) de la misma variable.

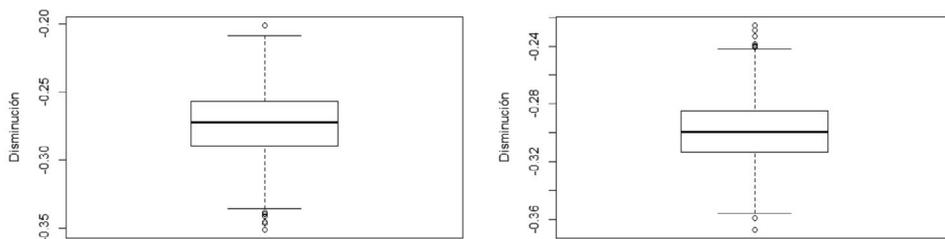


Figura 4. Diagrama de caja de la disminución, por sexo, en la reserva actuarial.

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Se puede observar que, las disminuciones en rentabilidad inferiores a 20.84% para hombres y a 24.14% para mujeres, son consideradas datos atípicos superiores. Las superiores a 33.8% para hombres y a 35.69% para mujeres son consideradas datos atípicos inferiores.

En la Figura 5 se muestra el histograma de frecuencias de las disminuciones en las reservas necesarias, tanto para hombres como para mujeres.

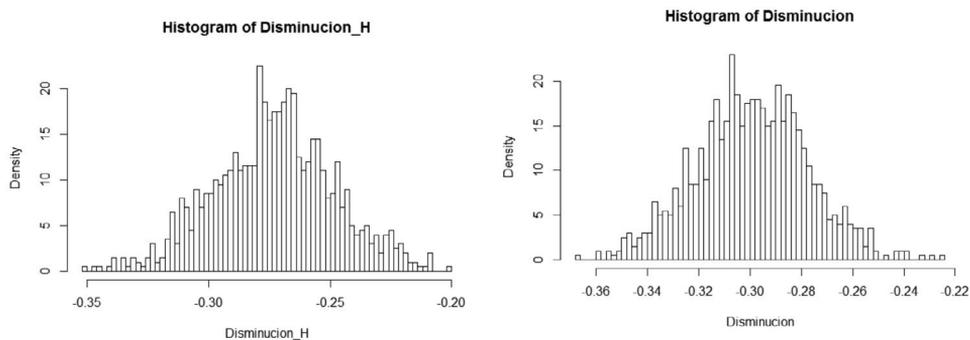


Figura 5. Histograma de frecuencias de las disminuciones por iteración.

Fuente: Elaboración propia, R-Project

A diciembre de 2018 la reserva actuarial de este fondo era de aproximadamente 16,000 millones de dólares estadounidenses y el pasivo pensional a cargo de las entidades territoriales excedía los 22,000 millones de dólares estadounidenses. Asumiendo que los administradores del fondo implementan la estrategia presentada en la presente investigación, se tiene una disminución del 27.32% para hombres y del 29.94% para mujeres (promedio de disminución según los 1,000 escenarios) y que la proporción de hombres y mujeres en la participación del fondo fuera igual a la de la población general (49.37% hombres y 50.63% mujeres), el pasivo pensional sería de 11,417 millones de dólares estadounidenses, lo cual permitiría liberar recursos para cubrir otras necesidades de la población por 4,583 millones de dólares estadounidenses.

#### *Fondos para el retiro de los trabajadores afiliados al IMSS y al ISSTE en México*

La Ley del Instituto Mexicano del Seguro Social (IMSS) de 1973 presentaba un esquema de pensiones de beneficio definido, caracterizado por un gobierno que asume el déficit de las cuentas que no logren concentrar la reserva actuarial necesaria para el pago de una renta vitalicia. Luego de más de 20 años, el gobierno mexicano modificó el sistema de pensiones como una medida para incrementar el ahorro interno del país utilizando los fondos de la seguridad social; hasta 1992, el sistema de pensiones para los mexicanos afiliados al IMSS y el Instituto de Seguridad y Servicios Sociales de los Trabajadores del Estado (ISSSTE) se basaba en un esquema de beneficio definido; es decir, sabían de antemano cuánto iban a recibir de pensión de por vida, llegado el momento de la jubilación.

Debido a los cambios demográficos que indican el incremento de la esperanza de vida y la disminución de la tasa de natalidad, aunado a las altas promesas de pensiones y las bajas tasas de contribución de los trabajadores, dichos planes de pensiones no podían ser sostenidos; fue así que el 21 de diciembre de 1995 se publica en el Diario Oficial de la Federación (DOF) la nueva Ley del Seguro Social (Ley), Congreso (1995), con un esquema de contribución definida, en el cual se establece que cada trabajador contará con un fondo en una cuenta individual en una Administradora de Fondos para el Retiro (Afore), por medio de sus Sociedades de Inversión de Fondos de Retiro (Siefore), y que cada trabajador deberá acumular en su cuenta individual durante su vida laboral (hasta los 65 años) la reserva actuarial suficiente para contratar una renta vitalicia con una aseguradora; es decir, los trabajadores gozan de un beneficio equivalente a lo que logren ahorrar. Con esta Ley, existe la posibilidad de que los trabajadores que hayan cotizado 1,250 semanas, no acumulen la cantidad suficiente para dicha contratación de plan de pensión; en este caso, el gobierno mexicano subsidiará una pensión mínima garantizada (un salario mínimo) y los trabajadores que quieran gozar de una pensión vitalicia y no cuenten con los recursos necesarios al momento de su jubilación, deberán cargar con el déficit de su cuenta para lograr la compra de su pensión vitalicia.

En la Figura 6 se muestra la evolución del valor de índice de la SIAfore Básica 1, portafolio en el cual las Afores, invierten el dinero de las reservas actuariales de las personas mayores de 60 años. Esta información corresponde al periodo comprendido entre el 1 de febrero de 2018 hasta el 31 de enero de 2019. En este período, la rentabilidad anual fue  $\hat{\mu}_v = 4.4151\%$  y la volatilidad anual  $\hat{\sigma}_v = 2.4981\%$ , por lo que la ecuación diferencial estocástica que sigue el precio de la unidad es:

$$dV_t = 0.044151V_t dt + 0.024981V_t dW_t \quad (59)$$

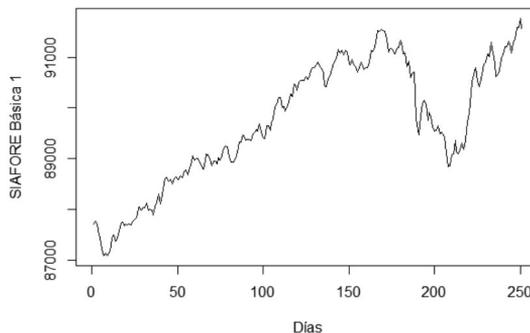


Figura 6. Valor de índice de la Siefore Básica 1 (01/02/2018-31/01/2019).

Fuente: Elaboración propia con datos de la CONSAR, R-Project

En esta sección se utilizaron las tablas de mortalidad oficiales para México que se muestran en el Anexo 2 y se considera un hombre de 60 años de edad cuyos pagos mensuales (mesadas pensionales) crecen anualmente el 3.5%, siendo el primer pago anual correspondiente a 7,000 dólares estadounidenses; así mismo, se considera a una mujer con exactamente las mismas características. El cálculo actuarial tradicional arroja un valor de reserva actuarial de 152,296 dólares estadounidenses para hombres y 174,348 dólares estadounidenses con una tasa de interés técnico del 4.4151% nominal anual. Asumiendo que la tasa de interés del bono a 10 años, emitido por Banco de México, sigue un proceso de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), se obtiene una estimación de los parámetros a través del método del Hessiano, Remillard (2013) y de la función *est.cir* de R-project.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma_r \sqrt{r}dW_t \tag{60}$$

$$dr = 0,012831(0,061129 - r)dt + 0,005712\sqrt{r}dW_t \tag{61}$$

Luego de 1,000 iteraciones se evidencia que en todos los casos se presenta una disminución en el capital requerido para financiar la renta vitalicia (Figura 7). También se muestra la disminución, por sexo, en la reserva actuarial necesaria por cada iteración realizada.

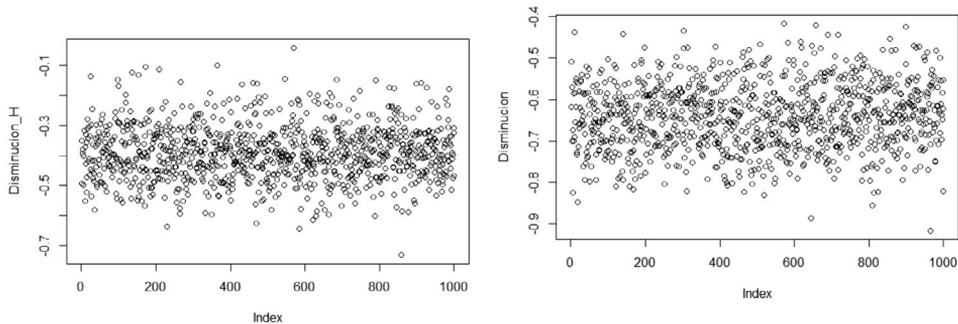


Figura 7. Disminución en la reserva actuarial necesaria por cada iteración por sexo (hombres a la izquierda, mujeres a la derecha)

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Para el caso del hombre, la menor disminución es 4% y la mayor es 73.27% ; para el caso de la mujer, la menor disminución es 41.65% y la mayor 91.66%, como se observa en la tabla 2.

Tabla 2

Mínimo, primer cuartil, mediana, media, tercer cuartil y máximo del ahorro generado por el modelo propuesto

Sexo	Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
Hombre	-0.7327453	-0.4505040	-0.3946375	-0.390327	-0.3350959	-0.0399676
Mujer	-0.9165761	-0.6987917	-0.6411653	-0.641158	-0.5846981	-0.4165424

Fuente: elaboración propia, R-Project

La disminución promedio para hombres es 39.03%, lo cual representa un ahorro de 59,445 dólares estadounidenses, pasando de una reserva actuarial de 152,296 dólares estadounidenses a una de 92,851 USD. Para la mujer, la disminución promedio es de 64.12%, pasando de una reserva de 174,348 dólares estadounidenses a una de 62,564 dólares estadounidenses, lo cual representa una disminución de 111,785 dólares estadounidenses. En la Figura 8 se muestra el diagrama de caja (*boxplot*) de la misma variable.

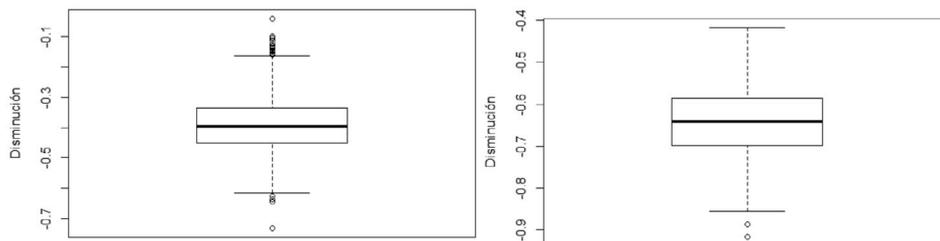


Figura 8. Diagrama de caja de la disminución en la reserva actuarial por iteración por sexo (hombres a la izquierda)

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Como se observa, disminuciones inferiores a 16.20% y superiores a 62.36% para hombres, son consideradas atípicas. Para mujeres, se consideran atípicas las superiores a 87%. En la Figura 9 se muestra el histograma de frecuencias.

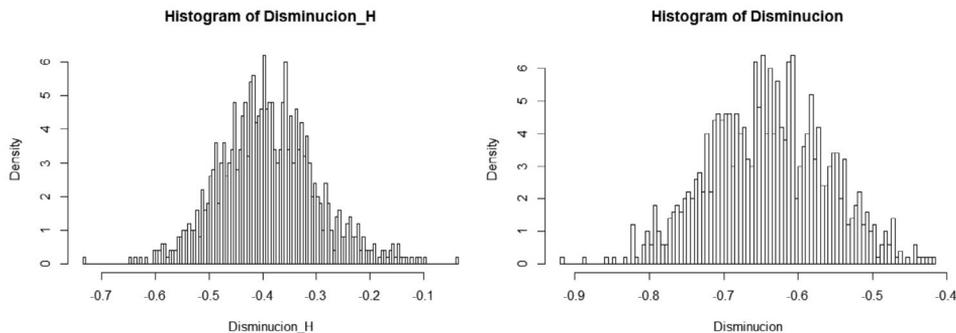


Figura 9. Histograma de frecuencias de las disminuciones por iteración por sexo

(hombres a la izquierda, mujeres a la

Fuente: Elaboración propia, R-Project

Según la Comisión Nacional del Sistema de Ahorro para el Retiro, CONSAR (2018), el gasto público comprometido para la Pensión Mínima Garantizada (PMG) alcanza, en valor presente, 43,697 millones de dólares estadounidenses. Asumiendo que los administradores de los fondos de retiro implementan la estrategia, se tiene una disminución en la reserva actuarial necesaria de 39.03% para hombres y de 64.12% para mujeres y que la composición por sexo de los titulares de los derechos pensionales es igual a la composición por sexo de la población general (48.6% hombres y 51.40% mujeres), el pasivo pensional sería de 21,007 millones de dólares estadounidenses, lo cual representaría un ahorro de 22,690 millones de dólares estadounidenses.

## Conclusiones

En la presente investigación, se propone un modelo para la estimación del monto de la reserva actuarial de una renta vitalicia a una vida, este planteamiento considera la dinámica estocástica de los activos en los cuales está invertida dicha reserva y por lo tanto del portafolio que soporta la renta. Así mismo, se presenta una estrategia de cobertura dinámica, que a través de una opción *put* sintética, anula cualquier déficit en la reserva actuarial, haciendo imposible en teoría que el pagador de la renta presente pérdidas. Los excedentes generados son valorados mediante el modelo de Cox, Ingersoll & Ross (1985b) y son restados al cálculo inicial de la reserva necesaria, junto con los costos generados por la cobertura dinámica (o sumados si se trata de ingresos).

El modelo propuesto es aplicado al FONPET en Colombia y a los Fondos para el retiro de los trabajadores afiliados al IMSS y al ISSSTE en México. En el primer caso, la estrategia de gestión del portafolio propuesta podría representar un ahorro en el gasto público de 28.64%, equivalente a 4,583 millones de dólares estadounidenses, aproximadamente. En el caso de México, el ahorro es de 51.92%, equivalente a 22,690 millones de dólares estadounidenses aproximadamente. La relevancia de la estrategia radica en la posibilidad de disminuir el costo de una renta vitalicia, permitiendo una mayor cobertura de los sistemas de retiro, con los beneficios sociales y fiscales que ello implica.

## Referencias

- Banda, H., & Gómez, D. (2009). Evaluación de un portafolio de inversión institucional: El caso de los fondos de pensiones en México. *Innovaciones de Negocios*, 6 (12), 303-323. Disponible en: <http://revistainnovaciones.uanl.mx/index.php/revin/article/view/232>. Consultado: 19/08/2020.
- Bernal, N. (2016). Los gastos públicos en pensiones en América Latina y sus proyecciones al año 2075: evidencia de Chile, Perú, Colombia y México. *Apuntes*, 43 (79), 79-128. <https://doi.org/10.21678/apuntes.79.867>
- Black, E., Derman, E. & Toy, W. (1990). A one-factor model of interest rates and its application to Treasury bond options. *Financial Analysts Journal*, January-February, 33-39. DOI: 10.2469/faj.v46.n1.33
- Black, F. & Scholes, M. (1973). The Pricing of Option and Corporate Liabilities. *Journal of Political Economy*, 81 (3), 637-654. Disponible en: <https://www.jstor.org/stable/1831029>. Consultado: 19/08/2020
- Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D.A. & Nesbitt, C. J. (1997). Actuarial Mathematics, 2nd edition. Itasca: Society of Actuaries. 134-148. Disponible en: [https://actuariestarea.files.wordpress.com/2013/09/bowers\\_actuarial\\_mathematics.pdf](https://actuariestarea.files.wordpress.com/2013/09/bowers_actuarial_mathematics.pdf). Consultado: 19/08/2020
- Castañón, I. V. & Ferreira, B. O. (2017). Densidades de Cotización en el Sistema de Ahorro para el Retiro en México. *Boletín CEMLA*, LXIII (3), 210-233. Disponible en: [https://www.cemla.org/PDF/boletin/PUB\\_BOL\\_LXIII-03.pdf](https://www.cemla.org/PDF/boletin/PUB_BOL_LXIII-03.pdf). Consultado: 19/08/2020
- Congreso, D. L. (1995). Diario Oficial. Instituto Mexicano del Seguro Social: Disponible en: [http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/lss/LSS\\_orig\\_21dic95.pdf](http://www.diputados.gob.mx/LeyesBiblio/ref/lss/LSS_orig_21dic95.pdf). Consultado: 19/08/2020
- Cox, J. C. & Ross, S. A. (1976). The Valuation of Options for Alternative Stochastic Processes. *Journal of Financial Economics*, 3 (1), 145-166. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(76\)90023-4](https://doi.org/10.1016/0304-405X(76)90023-4)
- Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985a). An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices. *Econometrica*, 53 (2), 363-384. DOI: 10.2307/1911241.
- Cox, J., Ingersoll, J. & Ross, S. (1985b). A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, 53 (2), 385-407. DOI: 10.2307/1911242
- Damián, A. (2016). Seguridad Social, Pensiones y Pobreza de los Adultos Mayores en México. *Acta Sociológica*, Vol. 70, 152-172. DOI: <http://dx.doi.org/10.1016/j.acso.2017.01.007>
- Duque, Q. S., Quintero, Q. M., & Gómez, R. N. (2013). El régimen subsidiado pensional en Colombia: un análisis desde la eficacia del principio de universalidad. *Estudios de Derecho*, 70 (156), 19-44. Disponible en: <https://revistas.udea.edu.co/index.php/red/article/view/21984>. Consultado: 19/08/2020
- Gómez, H. D., & Kato, V. E. (2008). Competitividad en el ámbito de pensiones en México. *Mercados y Negocios*, 17(9), 25-37. Disponible en: <http://www.revistascientificas.udg.mx/index.php/MYN/article/view/5093>. Consultado: 19/08/2020
- Grinols, E. L. & Turnovsky, S. J. (1993). Risk, the Financial Market, and Macroeconomic Equilibrium. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 17 (1-2), 1-36. [https://doi.org/10.1016/S0165-1889\(06\)80002-3](https://doi.org/10.1016/S0165-1889(06)80002-3).

- Heath, D., Jarrow, R.A. & Morton, A. (1992). Bond pricing and the term structure of interest rates: A new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60 (1), 77-105. DOI: 10.2307/2951677.
- Hull, J. & White, A. (1990). Pricing interest rate derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3 (4), 573-592. <https://doi.org/10.1093/rfs/3.4.573>.
- Hull, J. & White, A. (1993). One-factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28 (2), 235-254. DOI: 10.2307/2331288.
- Jarrow, R. A. (2002). *Modelling Fixed Income Securities and Interest Rate Options*, 2nd edition. Stanford University Press. Disponible en: <https://www.sup.org/books/title/?id=3745>. Consultado: 19/08/2020
- Jarrow, R. A. & Turnbull, S. (1999). *Derivative Securities: The Complete Investor's Guide*, 2nd edition. South-Western College Publishing.
- Merton, R. (1973). Theory of Rational Option Pricing. *Bell Journal of Economics*, 4 (1), 141-183. DOI: 10.2307/3003143
- Merton, R. (1974). On the pricing of corporate debt: the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 (2), 449-470. <https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1974.tb03058.x>.
- Nässäkkälä, E. & Keppo, J. (2005). Electricity load pattern hedging with static forward strategies. *Managerial Finance*, 31 (6), 115-136. DOI:10.1108/03074350510769721
- Neftci, S. N. (2010). *Ingeniería financiera*. McGraw-Hill. 202 – 205. Disponible en: <https://www.pinterest.com.mx/pin/142496775690596486/>. Consultado: 19/08/2020
- Remillard, B. (2016). *Statistical methods for financial engineering*. Chapman and Hall/CRC. 163 – 170. DOI: 10.1201/b14285.
- Schmedders, K. (1998). Computing Equilibria in the General Equilibrium Model with Incomplete Asset Markets. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 22 (8-9), 1375-1401. [https://doi.org/10.1016/s0165-1889\(98\)00017-7](https://doi.org/10.1016/s0165-1889(98)00017-7)
- Vasicek O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5 (2), 177-188. [https://doi.org/10.1016/0304-405X\(77\)90016-2](https://doi.org/10.1016/0304-405X(77)90016-2).
- Venegas Martínez, F. (2008). *Riesgos financieros y económicos: Productos derivados y decisiones económicas bajo incertidumbre*. Cengage Learning Editores. 763 – 765.
- Villagómez, A. (2014). El Ahorro para el retiro, Una reflexión para México. *El Trimestre Económico*, LXXXI (3) (323), 549-576. DOI: <http://dx.doi.org/10.20430/ete.v81i323.122>.

**Anexo**Tabla A1  
Tabla de mortalidad para Colombia

x	l(x) hombres	l(x) mujeres	x	l(x) hombres	l(x) mujeres	x	l(x) hombres	l(x) mujeres
15	1.000.000	1.000.000	47	966.561	981.111	79	599.994	753.202
16	999.515	999.728	48	964.017	979.663	80	570.538	731.048
17	999.019	999.450	49	961.269	978.097	81	539.892	707.105
18	998.510	999.165	50	958.298	976.402	82	508.181	681.314
19	997.988	998.872	51	955.085	974.566	83	475.562	653.637
20	997.451	998.570	52	951.608	972.576	84	442.222	624.065
21	996.898	998.259	53	947.843	970.418	85	408.381	592.620
22	996.327	997.938	54	943.766	968.077	86	374.288	559.368
23	995.736	997.606	55	939.348	965.536	87	340.219	524.423
24	995.124	997.262	56	934.604	962.801	88	306.474	487.954
25	994.488	996.905	57	929.498	959.851	89	273.371	450.192
26	993.826	996.533	58	923.991	956.662	90	241.235	411.435
27	993.136	996.145	59	918.039	953.206	91	210.391	372.049
28	992.415	995.740	60	911.595	949.454	92	181.152	332.340
29	991.660	995.315	61	904.607	945.372	93	153.808	292.640
30	990.868	994.869	62	897.019	940.925	94	128.609	253.452
31	990.036	994.400	63	888.769	936.072	95	105.758	215.411
32	989.159	993.906	64	879.635	930.769	96	85.395	179.222
33	988.233	993.384	65	869.557	924.968	97	67.556	145.594
34	987.254	992.832	66	858.477	918.617	98	52.206	115.166
35	986.216	992.247	67	846.334	911.658	99	39.285	88.438
36	985.114	991.625	68	833.069	904.029	100	28.688	65.719
37	983.942	990.963	69	818.623	895.662	101	20.255	47.092
38	982.693	990.258	70	802.940	886.485	102	13.771	32.413
39	981.360	989.505	71	785.968	876.420	103	8.975	21.338
40	979.936	988.699	72	767.658	865.384	104	5.580	13.370
41	978.411	987.836	73	747.970	853.289	105	3.290	7.930
42	976.776	986.910	74	726.872	840.044	106	1.828	4.425
43	975.021	985.916	75	704.342	825.554	107	950	2.306
44	973.135	984.846	76	680.372	809.722	108	458	1.112
45	971.105	983.694	77	654.970	792.450	109	202	492
46	968.919	982.452	78	628.162	773.641	110	81	197

Fuente: Elaboración propia con información de la Resolución Número 1555 de 2010 de la Superintendencia Financiera de Colombia

Tabla A2

Tabla de mortalidad para México

x	l(x) hombres	l(x) mujeres	x	l(x) hombres	l(x) mujeres	x	l(x) hombres	l(x) mujeres
15	977.833	986.289	47	886.534	953.883	79	539.385	812.518
16	976.151	985.381	48	881.490	952.538	80	519.810	796.755
17	974.423	984.475	49	876.219	951.148	81	499.668	778.852
18	972.659	983.569	50	870.707	949.711	82	478.987	758.493
19	970.850	982.654	51	864.952	948.211	83	457.801	735.314
20	968.996	981.740	52	858.932	946.656	84	436.156	708.930
21	967.087	980.827	53	852.636	945.027	85	414.108	678.921
22	965.133	979.915	54	846.053	943.326	86	391.722	644.880
23	963.116	978.994	55	839.167	941.543	87	369.069	606.420
24	961.045	978.074	56	831.958	939.670	88	346.234	563.237
25	958.912	977.145	57	824.421	937.687	89	323.310	515.192
26	956.706	976.216	58	816.531	935.596	90	300.397	462.411
27	954.439	975.279	59	808.276	933.379	91	275.924	405.410
28	952.091	974.343	60	799.635	931.017	92	250.519	345.222
29	949.673	973.398	61	790.591	928.504	93	224.368	283.517
30	947.166	972.444	62	781.120	925.811	94	197.814	222.624
31	944.570	971.481	63	771.215	922.922	95	171.271	165.374
32	941.888	970.510	64	760.850	919.821	96	145.217	114.743
33	939.109	969.529	65	750.008	916.473	97	120.172	73.248
34	936.226	968.540	66	738.668	912.844	98	96.673	42.275
35	933.240	967.533	67	726.820	908.900	99	75.241	21.627
36	930.141	966.517	68	714.442	904.601	100	56.329	9.597
37	926.923	965.483	69	701.511	899.897	101	40.277	3.609
38	923.577	964.431	70	688.014	894.732	102	27.264	1.123
39	920.095	963.360	71	673.944	889.042	103	17.277	283
40	916.479	962.272	72	659.279	882.756	104	10.102	56
41	912.712	961.155	73	644.010	875.782	105	5.345	9
42	908.788	960.021	74	628.122	868.023	106	2.492	1
43	904.698	958.860	75	611.615	859.360	107	984	0
44	900.437	957.671	76	594.484	849.649	108	309	0
45	895.998	956.445	77	576.732	838.731	109	69	0
46	891.365	955.182	78	558.364	826.427	110	8	0

Fuente: Elaboración propia con información del Anexo 14.2.5\_a de la Circular única de Seguros y Fianzas